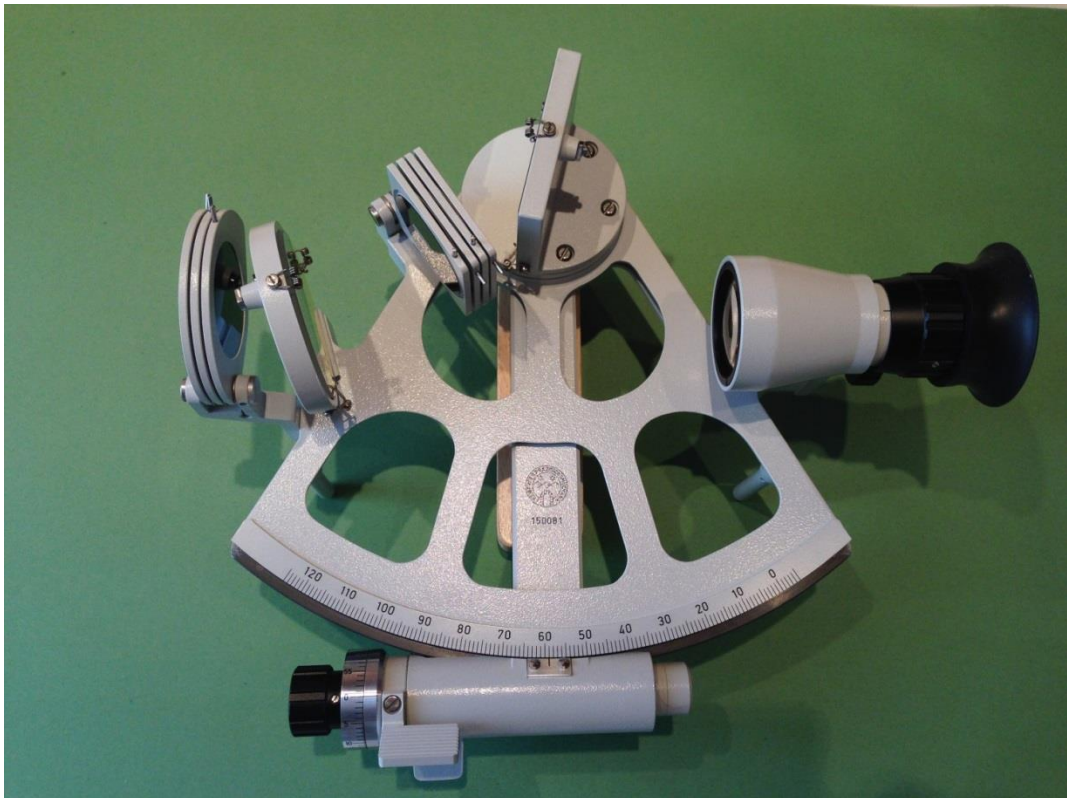


Astronavigatie

met

Sextant en Calculator HP-42S



Afkortingen en symbolen

$LOP1$ = Line of position 1 - Hoogtelijn 1

$LOP2$ = Line of position 2 - Hoogtelijn 2

$COP1$ = Circle of position 1 - Hoogtecirkel 1

$COP2$ = Circle of position 2 - Hoogtecirkel 2

$H1$ = Observed altitude (H_o) - ware hoogte in $COP1$

$H2$ = Observed altitude (H_o) - ware hoogte in $COP2$

Dec = Declinatie

GHA = Greenwich Hour Angle

$D1$ = Dec van de zon in $COP1$

$G1$ = GHA van de zon in $COP1$

$D2$ = Dec van de zon in $COP2$

$G2$ = GHA van de zon in $COP2$

φ = Latitude van de FIX in de berekeningen van de COP

L = Longitude van de FIX in de berekeningen van de COP

$\Delta\varphi$ = Verplaatsing in breedtegraden van de waarnemer (verzeiling)

ΔL = Verplaatsing in lengtegraden van de waarnemer (verzeiling)

lat_M = Gemiddelde latitude

$latx$ = Dead-reckoning of aangenomen latitude van de waarnemer

$lonx$ = Dead-reckoning of aangenomen longitude van de waarnemer

FIX = Berekende positie

laf = FIX latitude

lof = FIX longitude

$IN1, IN2$ = Intercept van $LOP1, LOP2$

$AZ1, AZ2$ = Azimut van $LOP1, LOP2$

Ha = Apparent altitude - schijnbare hoogte

Dog = Distance over Ground van de waarnemer

Cog = Course over Ground van de waarnemer

Ie = Indexfout van de sextant

HoE = Ooghoogte van de waarnemer

Da. Mo = Dag en Maand van de meting

Year = Jaar van de meting

U. T = Universal Time van de meting

ALTs = Gemeten sextanthoogte

Limb = Bovenrand, onderrand of middellijn van de zon

Npos = Noordelijk snijpunt van de hoogtecirkels

Spos = Zuidelijk snijpunt van de hoogtecirkels

Tran = Middagbreedte van de waarnemer (Transit)

Woord Vooraf

De astronomische plaatsbepaling door de gelijktijdige meting van een aantal sterren leidt tot een vrij nauwkeurige positie, maar de oefening die nodig is om die sterren te identificeren en in de schemering hun hoogte boven de horizon te bepalen, zal veelal ontbreken. Daarom beperken we ons tot de plaatsbepaling met behulp van de zon.

Aan de hand van nautische almanakken zoals de Macmillan en de HO249-tafels kunnen we van oudsher onze positie bepalen op basis van zonshoogten.

Met de komst van de programmeerbare calculators kon het hele opzoek-, reken- en plotwerk dat erop volgt van ons worden overgenomen. *GHA* en *Dec* van de zon kunnen met een ingebouwd algoritme worden berekend, alsmede de azimut en intercept van de hoogtelijnen. Het enigszins moeizame kaartwerk wordt eveneens digitaal overgenomen met als uiteindelijk resultaat onze positie in lengte- en breedtegraden (*FIX*).

HP-42S

De HP-42S RPN Scientific is een programmeerbare RPN calculator die in 1988 door HP werd gelanceerd. De productie ervan werd beëindigd in 1995 maar hij wordt tot op vandaag beschouwd als één van de besten die ooit werden gemaakt in termen van kwaliteit en gemak van programmering. Zijn populariteit was dermate groot dat hij op de site van [Thomas Okken](#) onder de benaming "**Free42** : An HP-42S Calculator Simulator" wordt aangeboden als freeware voor tal van operating systemen van *computers en smartphones*. De computerapplicatie van Free42 wordt als een zipbestand aangeleverd in decimale en binaire versie maar het verdient aanbeveling Free42Decimal.exe te installeren. Android en iOS applicaties zijn in decimale versie.

De Free42-app heeft het voordeel dat de programma's kunnen worden opgeslagen en ingeladen als bestanden, back-ups kunnen worden gemaakt en ingeladen in andere computers. Instructies daarvoor vindt men [hier](#). Bovendien is de rekensnelheid vele malen hoger dan bij de hardware versie van de HP-42S.

Free42 programma's worden opgeslagen met de bestandsextensie ".raw".

Bij de hierna beschreven programma's over astronavigatie worden slechts een beperkt aantal toetsen gebruikt, zodat geen grondige kennis van de calculator is vereist. Wie zich verder wil verdiepen kan [hier](#) terecht.

Programma's

In deze tekst worden twee programma's beschreven voor Free42 en HP-42S om te navigeren op de zon bij middel van een sextant of theodoliet:

ASTRO_TSO.raw: berekent de positie (*FIX*) aan de hand van de azimut-intercept methode van Marcq St. Hilaire. Deze methode, ontwikkeld in 1875, werd gaandeweg de standaard procedure voor astronomische plaatsbepaling en is gebaseerd op de keuze van een aangenomen positie (A.P), zo dicht mogelijk bij de ware positie of de gegiste positie, en de berekening van het snijpunt van twee zogenoemde *hoogtelijnen* (LOP verder in de tekst). Dit programma maakt het gebruik van kaarten en "plotting sheets" overbodig.

ASTRA_TSO.raw: berekent de positie (*FIX*) aan de hand van een alternatieve methode die rechtstreeks de snijpunten berekent van twee *hoogtecircels* (COP verder in de tekst). Voor een *stationaire waarnemer* is, in tegenstelling met de vorige methode, geen aangenomen positie (A.P) vereist zodat men zijn positie kan bepalen zonder enig idee van waar men zich bevindt. In het *geval van verzeiling* moet zoals bij het vorige programma wel de breedtegraad van de waarnemer, *latx*, gekend zijn voor de berekening van de longitudinale verplaatsing ΔL .

Beide programma's hebben een ingebouwde almanak van de zon met een maximale afwijking van $\pm 0.5'$ en een gemiddelde afwijking van $\pm 0.3'$ voor *GHA* en *Dec*. Ter verificatie kunnen de almanakdata op de sites backbearing.com en siranah.de geraadpleegd worden.

Correcties op de gemeten sextanthoogte *ALTs*

Op de gemeten sextanthoogte worden een aantal correcties toegepast in beide programma's;

- *Instrument correctie*: wordt aangenomen als zijnde = 0 in beide programma's. Indien de sextant van een certificaat voorzien is kan deze correctie bij de input van *ALTs* in rekening worden gebracht.
- *Indexcorrectie*: is een correctie voor de indexfout *Ie* van de sextant die in principe voor elke nieuwe waarneming moet gemeten worden. *Ie* is negatief indien "off the arc" en positief "on the arc".
- *Dip*: dit is een correctie die functie is van de ooghoogte *HoE*. Bij gebruik van een artificiële horizon is *HoE* = 0.

$$Dip['] \approx 1.76 \cdot \sqrt{HoE[m]}$$

- *Refractie*: dit is een correctie voor de breking van het licht volgens de formule van Bennett.

$$Refractie['] = \frac{1}{\tan\left(Ha[^\circ] + \frac{7.31}{Ha[^\circ] + 4.4}\right)}$$

- *Parallax*: voor de parallax wordt geen correctie toegepast omdat de horizontale parallax van de zon zeer klein is (maximaal $\pm 0.15'$).
- *Semi diameter (S.D)*: deze correctie wordt gemaakt indien de onder- of bovenrand (*Limb*) van de zon wordt gemeten. Tussen zomer en winter varieert de *S.D* tussen $\pm 15.75'$ en $16.29'$ maar in de programma's wordt $16' = 0.2667^\circ$ als gemiddelde gehanteerd. Voor een grotere nauwkeurigheid moet de waarde in de programmalijn #326 in ASTRO en #282 in ASTRA worden vervangen door de werkelijke waarde (in graden!) van de [zon-almanak](#).

Sextanthoogtes

$Ha = ALTs - Ie - Dip$ (Apparent altitude – schijnbare hoogte)

$Ho = Ha - Refractie - S.D$ (Observed altitude – ware hoogte)

$HoE = 0$ impliceert het gebruik van een artificiële horizon

Bij het gebruik van een artificiële horizon is $Dip = 0$ en $Ha = (ALTs - Ie)/2$

Gebruikte formules

- Als de Cog en Dog gekend zijn dan is de verzeiling van de waarnemer in breedtegraden en lengtegraden respectievelijk:

$$\Delta\varphi[^\circ] = Dog[nm] \cdot \cos Cog / 60$$

$$\Delta L[^\circ] = \frac{Dog[nm] \cdot \sin Cog}{\cos lat_M \cdot 60}$$

waarin de gemiddelde latitude

$$lat_M = latx + \Delta\varphi/2$$

en $latx$ de latitude is vóór verzeiling.

- In *ASTRO_TSO.raw* (azimut-intercept methode) zijn de *FIX*-coördinaten

$$laf = \frac{IN2 \cdot \sin AZ1 - IN1 \cdot \sin AZ2}{\sin(AZ1 - AZ2)} + latx$$

$$lof = \frac{IN1 \cdot \cos AZ2 - IN2 \cdot \cos AZ1}{\sin(AZ1 - AZ2) \cdot \cos latx} + lonx$$

waarin $latx$ en $lonx$ de coördinaten zijn van de A.P na verzeiling. Deze waarden worden berekend uitgaande van de A.P vóór verzeiling, Cog en Dog .

Format en eenheden van de input data

<i>latx, lonx</i>		+ (N en E) – (S en W)
<i>Ie</i>	x.xx [minuten]	– OFF the arc + ON the arc
<i>HoE</i>	xx.xx [meter]	Artificiële horizon HoE=0
<i>Da.Mo</i>	xx.xx [dag.maand]	Vb: 5.07 23.12
<i>U.T</i>	xx.xx xx [h.min sec]	Vb: 17.0533 6.0806
<i>latx, lonx, ALTs</i>	xxx.xx x [ddd°mm.m']	Vb: –15.416 156.093
<i>Limb</i>	Onder=-1 Center=0 Boven=1	
<i>Dog</i>	xxx.x [zeemijl]	
<i>Cog</i>	xxx.x [°]	

Programma-onderdelen

ASTRO_TSO.raw : bestaat uit 3 subroutines; *LOP1*, *LOP2*, en *TRAN*

- *LOP1 (Hoogtelijn1)*: hier worden de aangenomen positie (A.P), die meestal de gegiste positie is, en de gegevens van de eerste waarneming ingebracht. De subroutine berekent de intercept *IN1* en azimut *AZ1* van de eerste hoogtelijn *LOP1* en slaat ze op in hun gelijknamige variabelen.
- *LOP2 (Hoogtelijn2)*: aan de hand van de *Dog* en *Cog* wordt de A.P na verzeiling vastgelegd. Samen met de gegevens van de tweede waarneming wordt de *IN2* en *AZ2* van de hoogtelijn *LOP2* ten opzichte van deze nieuwe A.P berekend. De coördinaten van het snijpunt van de verzeilde hoogtelijn *LOP1* en *LOP2*, zijnde de *FIX*, worden verkregen met de bovenstaande formules. Geometrisch gezien komt dit eigenlijk neer op de translatie van de eerste hoogtelijn in de richting (= *Cog*) van de nieuwe A.P over een afstand = *Dog*. De coördinaten van de *FIX* worden opgeslagen als "*laf*" en "*lof*".
De geometrische fout die wordt gemaakt met de intercept methode door de gelijkstelling van de hoogtecirkel met een hoogtelijn geeft geen exacte positie maar eerder een verbeterde positie. Deze fout is des te groter naarmate de afstand tussen de A.P en de ware positie groot is en bij grote sextanthoogtes *ALTs* (grote kromming van de hoogtecirkel). Zij kan evenwel verkleind worden door iteratie, d.i. de gevonden *FIX* als nieuwe A.P inbrengen en de berekening herhalen met de initiële parameters (zie bijlage). Meestal volstaat 1 iteratie.
- *TRAN (Transit)*: dit onderdeel berekent de middagbreedte van onze positie. De input van de gegiste longitude *lonx* resulteert slechts in een ruwe schatting van het tijdstip van transit omdat het berekend is op basis een vast transit tijdstip van de Greenwich meridiaan t.t.z. 12h U.T. Preciezer is om uit te gaan van de werkelijke "[Greenwich meridian transit time](#)" en 4 minuten bij te tellen per graad westerlengte of 4 minuten af te trekken per graad oosterlengte.
"South" en "North" geven de stand aan van de zon t.o.v. de waarnemer, ten zuiden of ten noorden.
De middagbreedte wordt opgeslagen als "*laf*".

Opmerkingen

- *LOP1* en *LOP2* moeten chronologisch worden ingevoerd.

- bij gebruik van een theodoliet zou in analogie met een artificiële horizon $HoE=0$ moeten zijn. Om te beletten dat *Ha* gedeeld wordt door 2 stelt men $HoE=0.0001$ en de Dip-correctie die men hierdoor toepast is te verwaarlozen.

ASTRA_TSO.raw : bestaat uit 3 subroutines; *COP1*, *COP2*, en *TRAN*

- *COP1 (Hoogtecirkel1)*: *latx* is de gegiste of gekende latitude van de eerste waarneming en zal in *COP2* gebruikt worden om de verzeiling in lengtegraden ΔL te berekenen. Voor een *stationaire waarneming (Dog=0)* is deze waarde irrelevant. Na inbreng van de overige meetwaarden berekent deze routine de parameters die de *Hoogtecirkel1* definiëren i.e. *GHA (=G1)*, *Dec (=D1)* en *Ho (=H1)*.
- *COP2 (Hoogtecirkel2)*: met *Dog* en *Cog* berekenen we de verzeiling van de eerste hoogtecirkel *COP1*, zijnde $\Delta\varphi$ in latitude en ΔL in longitude. Met de overige ingebrachte meetwaarden berekent deze routine de parameters die de *Hoogtecirkel2* definiëren, i.e. *GHA (=G2)*, *Dec (=D2)*, *Ho (=H2)*, en uiteindelijk onze positie (*FIX*).

Deze 2 hoogtecirkels hebben op de aardbol normaliter 2 snijpunten. Dit zijn onze 2 mogelijke posities. Bij de berekening van de coördinaten van deze snijpunten krijgt men de keuze tussen het noordelijke snijpunt (*Npos*) en het zuidelijke snijpunt (*Spos*).

De coördinaten van de *FIX* worden opgeslagen als "*laf*" en "*lof*".

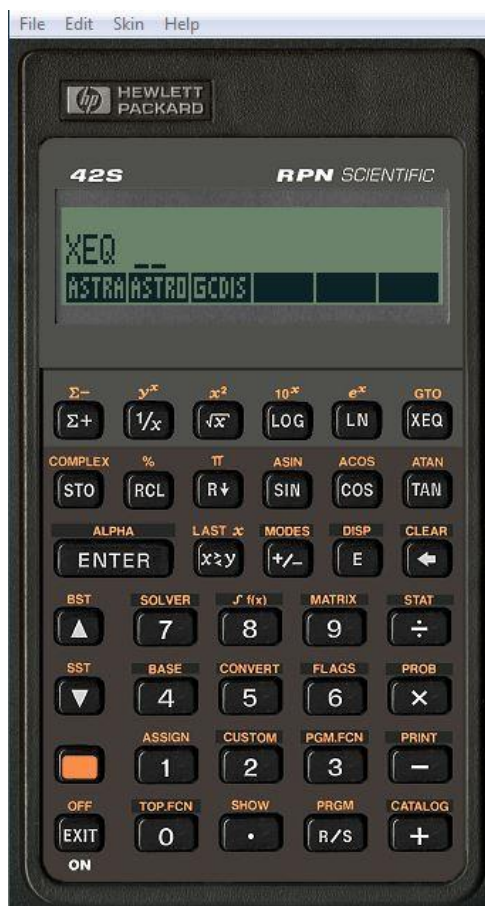
Het algoritme voor de berekening van de snijpunten wordt in detail behandeld in de bijlage.

- *TRAN (Transit)*: zie *ASTRO_TSO.raw*

Opmerkingen: zie *ASTRO_TSO.raw*

ASTRO versus ASTRA

- Indien men volledig in het ongewisse is over zijn positie kan men onmogelijk rechtstreeks een geschikte A.P invoeren in *ASTRO*. Bij een *stationaire meting (Dog=0)* heeft *ASTRA* deze gegevens niet nodig. Met 2 waarnemingen, bij voorkeur met een verschil in azimut tussen 30° en 150° kan rechtstreeks en afgezien van de normale meetfouten een nauwkeurige positie bepaald worden.



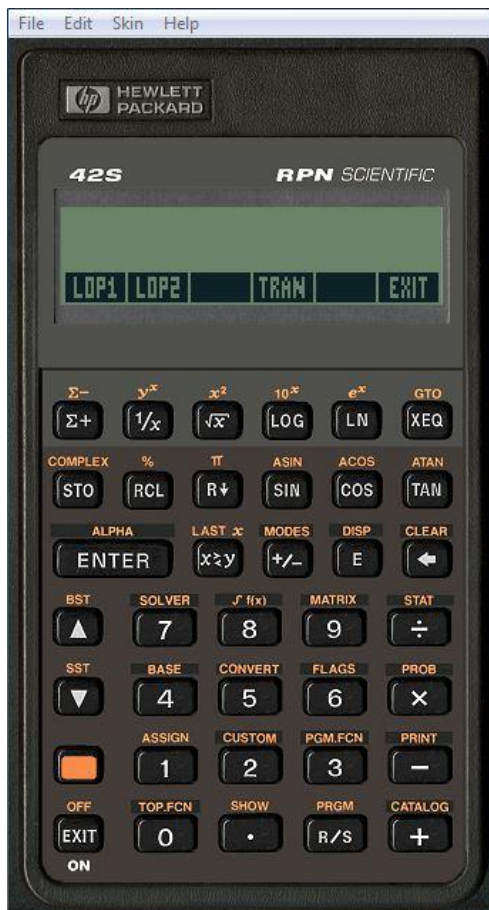
- Het iteratie-proces van het *ASTRA* programma verloopt zeer snel in Free42 maar kan bij de HP-42S, omwille van zijn lage kloksnelheid, onder bepaalde omstandigheden (bv. $H1 \approx H2$) veel tijd in beslag nemen.

- *ASTRA* itereert steeds naar de meest nauwkeurige positie. Bij *ASTRO* kan bij een grote afstand tussen de A.P en de ware positie en/of bij grote sextanthoogtes minstens 1 iteratie nodig zijn met de gevonden *FIX* als nieuwe A.P.

Free42 en HP-42S commando's

- Druk op de toets **XEQ**. In de display verschijnt de lijst van de programma's die werden ingeladen.

- Druk op de toets onder de naam van het gekozen programma en na verschijnen van het label druk op **R/S**. Hierop verschijnt het hoofdmenu in de display, bestaande uit de 3 subroutines en de **EXIT** routine om het programma te sluiten.



- Elke routine wordt gestart met de toets onder zijn naam. De gevraagde data worden ingebracht via het cijferklavier. Let hierbij vooral op de eenheden en het formaat. Bij negatieve getallen toetst men eerst het getal in, gevolgd door [+/-]. Een foutieve inbreng kan gewist worden met de [←] toets en met [RTN] keert men terug naar het hoofdmenu. Elke input wordt gevolgd door [R/S]. Bij een keuzemenu drukt men op de toets onder de gewenste keuze. Als het programma stopt met relevante informatie in de display, druk op [R/S] om verder te gaan.
- Ingebrachte data en berekende waarden worden opgeslagen als variabelen en kunnen opgeroepen worden met [RCL] en de scrolltoetsen [▲] en [▼].
- Berekende waarden *GHA*, *Dec*, *laf* en *lof* worden opgeslagen in het format [ddd°mm.m']. *AZ1* en *IN1* in [°].
- De resultaten van de waarnemingen kunnen uitgeprint worden. De printfunctie wordt geactiveerd door [PRINT] [▲] [PON] en uitgeschakeld door [PRINT] [▲] [POFF]. De print is nagenoeg bij alle operating systems beschikbaar via het File-menu. Bij de iPhone moet het scherm aangeraakt worden net onder de statusbalk.

Bijlage: berekening van de snijpunten van 2 hoogtecirkels

We passen de formules van de nautische driehoek toe op 2 waarnemingen;

$$\sin H1 = \sin D1 \cdot \sin(\varphi - \Delta\varphi) + \cos D1 \cdot \cos(\varphi - \Delta\varphi) \cdot \cos(G1 + L - \Delta L) \quad (1)$$

$$\sin H2 = \sin D2 \cdot \sin \varphi + \cos D2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(G2 + L) \quad (2)$$

(1) en (2) zijn de vergelijkingen van 2 hoogtecirkels waarin φ en L de geografische coördinaten zijn van de positie van de waarnemer op het ogenblik van de tweede meting, t.t.z. de *FIX*. $H1$ en $H2$ zijn de ware sextanthoogten (na correcties) en $\Delta\varphi$ en ΔL zijn respectievelijk de verzeiling in breedte- en lengtegraden na de eerste meting.

Het stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden (φ en L) kan analytisch niet opgelost worden maar wel door iteratie. Aan dit proces zijn 2 voorwaarden verbonden:

- de iteratie moet gestart worden in de hoogtecirkel met de kleinste sextanthoogte H , d.w.z. de hoogtecirkel met de grootste straal.
- aangezien voor 1 waarde van φ , 2 waarden van L mogelijk zijn en vice versa moet hier de gepaste keuze gemaakt worden.

Indien $H2 < H1$

dan plaatst men in vergelijking (2) de startwaarde voor φ ($= D2$). Dit geeft 2 mogelijke L -waarden: $L = \text{Acos}(\dots) - G2$ en $L = -\text{Acos}(\dots) - G2$. Men kiest de meest oostelijke (=positieve) waarde en vermits Acos steeds positief is, wordt

$$L = \text{Acos} \left(\frac{\sin H2 - \sin D2 \cdot \sin \varphi}{\cos D2 \cdot \cos \varphi} \right) - G2$$

Deze L -waarde plaatst men in (1) en berekent de nieuwe φ -waarde voor (2)

$$\varphi = 2 \cdot \text{Atan} \left(\frac{\sin D1 \pm \sqrt{\sin^2 D1 - \sin^2 H1 + \cos^2 D1 \cdot \cos^2 (G1 + L - \Delta L)}}{\sin H1 + \cos D1 \cdot \cos (G1 + L - \Delta L)} \right) + \Delta \varphi$$

met $+\sqrt{\dots}$ voor het noordelijke snijpunt van de hoogtecirkels en $-\sqrt{\dots}$ voor het zuidelijke snijpunt.

Indien $H2 > H1$

dan plaatst men in vergelijking (1) de startwaarde voor φ ($= D2$). Dit geeft 2 mogelijke L -waarden: $L = \text{Acos}(\dots) - G1 + \Delta L$ en $L = -\text{Acos}(\dots) - G1 + \Delta L$. Men kiest de meest westelijke (=negatieve) waarde en vermits Acos steeds positief is, wordt

$$L = -\text{Acos} \left(\frac{\sin H1 - \sin D1 \cdot \sin(\varphi - \Delta \varphi)}{\cos D1 \cdot \cos(\varphi - \Delta \varphi)} \right) - (G1 - \Delta L)$$

Deze L -waarde plaatst men in (2) en berekent de nieuwe φ -waarde voor (1)

$$\varphi = 2 \cdot \text{Atan} \left(\frac{\sin D2 \pm \sqrt{\sin^2 D2 - \sin^2 H2 + \cos^2 D2 \cdot \cos^2 (G2 + L)}}{\sin H2 + \cos D2 \cdot \cos (G2 + L)} \right)$$

met $+\sqrt{\dots}$ voor het noordelijke snijpunt van de hoogtecirkels en $-\sqrt{\dots}$ voor het zuidelijke snijpunt.

In beide gevallen wordt de waarde van φ berekend door substitutie, aan de hand van de zogenoemde T-formules, met als variabelen respectievelijk $\tan((\varphi - \Delta \varphi)/2)$ en $\tan(\varphi/2)$.

De iteraties worden gestopt als 2 opeenvolgende waarden van φ minder dan 0.001° verschillen.

Bij de gemaakte keuzes in het hierboven beschreven iteratieproces gaat men er impliciet van uit dat de aardse projectie van de zon bij de tweede waarneming ten westen ligt van de aardse projectie van de eerste waarneming.

Bijlage: iteraties in ASTRO

Een "running" fix is minder nauwkeurig dan een stationaire fix. De *Cog* en *Dog* kunnen immers enkel geschat worden omdat de effecten van stroming en drift in de meeste gevallen niet exact gekend zijn. Bij een stationaire meting ($Dog=0$) kan men de gevonden positie verfijnen door de *FIX* als nieuwe A.P in te brengen met de volgende toets-sequentie vanuit het hoofdmenu:

LOP1 **RCL** **LAF** **R/S** **RCL** **LOF** **R/S** en de berekening te herhalen met de initiële input parameters.

Interessante websites

<http://thomasokken.com/free42/>

<https://www.celnav.de/page2.htm>

<http://www.teacupnavigation.net/CN.html>

<http://www.backbearing.com/almanac.html>

http://www.siranah.de/html/fr_sail.htm

Lijst van gebruikte vergelijkingen in de tekst

$$\sin H1 = \sin D1 \cdot \sin(\varphi - \Delta\varphi) + \cos D1 \cdot \cos(\varphi - \Delta\varphi) \cdot \cos(G1 + L - \Delta L) \quad (1)$$

$$\sin H2 = \sin D2 \cdot \sin \varphi + \cos D2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(G2 + L) \quad (2)$$

start $\varphi=D2$ in (2)

start $\varphi=D2$ in (1)

$$L = A \cos \left(\frac{\sin H2 - \sin D2 \cdot \sin \varphi}{\cos D2 \cdot \cos \varphi} \right) - G2$$

$$\varphi = 2 \cdot \text{Atan} \left(\frac{\sin D1 \pm \sqrt{\sin^2 D1 - \sin^2 H1 + \cos^2 D1 \cdot \cos^2(G1 + L - \Delta L)}}{\sin H1 + \cos D1 \cdot \cos(G1 + L - \Delta L)} \right) + \Delta\varphi$$

$$L = -A \cos \left(\frac{\sin H1 - \sin D1 \cdot \sin(\varphi - \Delta\varphi)}{\cos D1 \cdot \cos(\varphi - \Delta\varphi)} \right) - (G1 - \Delta L)$$

$$\varphi = 2 \cdot \text{Atan} \left(\frac{\sin D2 \pm \sqrt{\sin^2 D2 - \sin^2 H2 + \cos^2 D2 \cdot \cos^2(G2 + L)}}{\sin H2 + \cos D2 \cdot \cos(G2 + L)} \right)$$

$$\Delta\varphi = \text{Dog} \cdot \cos \text{Cog} / 60 \quad (\text{decimal } ^\circ)$$

$$\Delta L = \frac{\text{Dog} \cdot \sin \text{Cog}}{\cos \text{lat}_M \cdot 60} \quad (\text{decimal } ^\circ)$$

$$\text{lat}_M = \text{lat}_x + \Delta\varphi / 2$$

$$\text{laf} = \frac{IN2 \cdot \sin AZ1 - IN1 \cdot \sin AZ2}{\sin(AZ1 - AZ2)} + \text{lat}_x$$

$$\text{lof} = \frac{IN1 \cdot \cos AZ2 - IN2 \cdot \cos AZ1}{\sin(AZ1 - AZ2) \cdot \cos \text{lat}_x} + \text{lon}_x$$

$$\text{Lon} = \pm A \cos \left(\frac{\sin Ho - \sin Dec \cdot \sin Lat}{\cos Dec \cdot \cos Lat} \right) - GHA$$

$$\text{Dip}['] \approx 1.76 \cdot \sqrt{\text{HoE}[m]}$$

$$\text{Refractie}['] = \frac{1}{\tan \left(\text{Ha}[^\circ] + \frac{7.31}{\text{Ha}[^\circ] + 4.4} \right)}$$