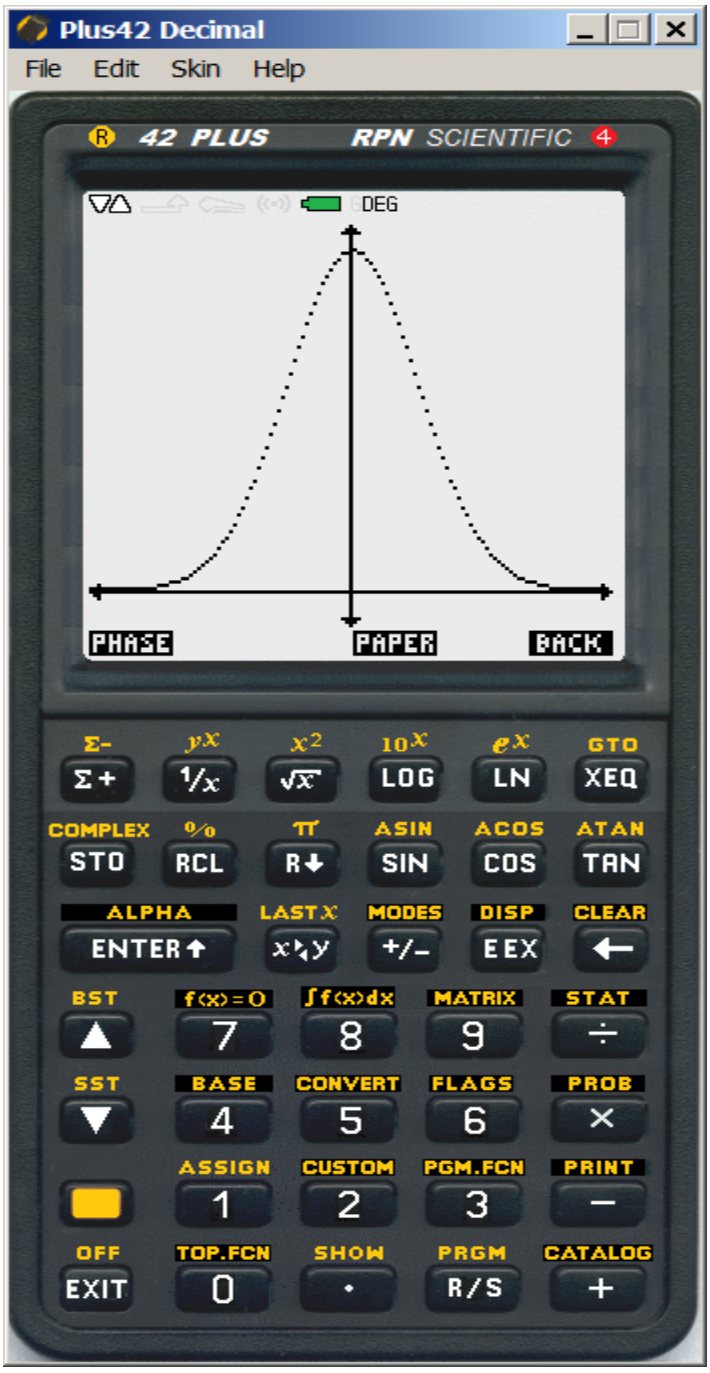
HPFX

Nullstellen – Ableitungen – Integrale – Tabellen und Graphiken für transzendente Funktionen



Eine bebilderte Dokumentation für den PLUS42

(Version 2, Juni 2024)

INHALTSVERZEICHNIS

0 Tipps und Tricks für HP-Taschenrechner

1 Ableitungsfreie Nullstellenverfahren

1.1 Die 1-Punkt-Verfahren $(x_0 ; f(x_0))$ nach Kasturiarachi und Ostrowski

1.2 Die 2-Punkte-Verfahren $(x_0, f(x_0))$; $(x_1, f(x_1))$

- **Das KANWAR-SHARMA-MAMTA-Verfahren**
- **Die Verfahrensklasse: Illinois – Pegasus – Andersen-Björck**
- **Das Dekker-Verfahren**
- **Das Ridders-Verfahren**

1.3 Die 3-Punkte-Verfahren

- **Inverse quadratische Interpolation**
- **Die Sharma Familie**

2 Numerische Integration einer reellen Funktion

- **Tabelle: Gauß49-Kronrod99-Quadraturformel**

3 Numerische Differentiation reeller Funktionen

- **Über die Konstruktion der Gleichungssysteme zur Berechnung der Gewichte rechts- und linksseitiger, sowie zentraler Ableitungen**
- **Tabelle der Gewichte der rechts- und linksseitigen Ableitungen für $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ und $f^{(4)}(x)$**

- **Tabelle der Gewichte der rechts- und linksseitigen Ableitungen für $f^{(5)}(x)$, $f^{(6)}(x)$, $f^{(7)}(x)$ und $f^{(8)}(x)$**
- **Gewichte für die zentrale Ableitung bis $f^{(10)}(x)$**
- **Höhere rechts- und linksseitige Ableitungen mit bis zu 10 Stützstellen**
- **Gewichte rechts- und linksseitiger Ableitungen für $f^{(4)}(x)$ bis $f^{(10)}(x)$**
- **Symbolische Differentiation (HP-Prime APP)**
- **Symbolische Differentiation (MS Mathematics)**

4 Plotten: Das “interessante“ Intervall

5 Bebilderte Kurzanleitung der HPFX-Funktionen

- **Initialisierung HPReg-Matrix**
- **Formeln und Funktionen des Programms HPFX**
- **Funktion $f(x)$ als EQN oder als Programm PRGM**
- **Globale Parameter**
- **Integration INTEG**
- **Nullstellenverfahren SOLVE**
- **Graphiken TABLE - PLOT - PHASE**
- **Ableitungen DERIV**
  - **mit dem HP-PRIME**
  - **mit der Microsoft Mathematics Applikation** (Achtung: Fehler bei logarithmischen Ableitungen)

0 Tipps und Tricks für HP-Taschenrechner

Schon in den HP-65 MATH-PACs 1 und Math-PACs2 wurden die hier dokumentierten Formeln zur Berechnung elementarer Funktionen verwendet. Für die Taschenrechnerprogrammierung sind sie an Praktikabilität nicht zu überbieten und finden weiterhin Verwendung.

Elementare komplexe Funktionen

$$z = x + iy \; ; \; w = u + iv \; ; \; x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{|x+iy|+x}{2}} + i \frac{y}{2\sqrt{\frac{|x+iy|+x}{2}}}$$

$$\sqrt[3]{x} = sign(x)\sqrt[3]{|x|} \text{ , reelle Kubikwurzel für } x \in \mathbb{R}$$

$$atan2\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} atan(y/x), & x > 0 \\ 0 \text{ (undefiniert)}, & x = 0 \; ; \; y = 0 \\ +\pi/2, & x = 0 \; ; \; y > 0 \\ -\pi/2, & x = 0 \; ; \; y < 0 \\ atan(y/x) + \pi, & x < 0 \; ; y \geq 0 \\ atan(y/x) - \pi, & x < 0 \; ; y < 0 \end{cases}$$

HP-Code:

```
→POL   X<>Y
FS? 42   0.9
FC? 42   1   ×
FC? 43   →RAD
```

$$z \cdot w = (x+iy)(u+iv) = x \cdot u - y \cdot v + i\,(x \cdot v + y \cdot u)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{(x+iy)}{(u+iv)} = \frac{x \cdot u + y \cdot v}{u^2 + v^2} + i\,\frac{u \cdot y - x \cdot v}{u^2 + v^2}$$

$$ln(z) = ln\,|r| + i\,\theta = ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + i\,atan2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\log_z(w) = \frac{ln\,(w)}{ln\,(z)}$$

$$z^w = e^{w\,ln(z)}$$

$$z^{1/w} = e^{ln(z/w)}$$

$$e^z = e^{(x\,+\,iy)} = \left(cos\,(y) + i\,sin(y)\right) e^x$$

$$e^{iz} = e^{(-y\,+\,ix)} = \left(cos\,(x) + i\,sin(x)\right) e^{-y}$$

$$e^{ix} = cos\,(x) + i\,sin(x)$$

Komplexe (und reelle) trigonometrische und hyperbolische Funktionen und Umkehrfunktionen	
$sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$asin(z) = -i\,ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$
$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	$acos(z) = -i\,ln\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$
$tan(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}$	$atan(z) = \frac{1}{2i}\,ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$
$sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$	$asinh(z) = ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$
$cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$	$acosh(z) = ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$
$tanh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$	$atanh(z) = \frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$
$cot[h](z) = \frac{1}{tan[h](z)}$	$acot[h](z) = atan[h]\left(\frac{1}{x}\right)$
$sec[h](z) = \frac{1}{cos[h](z)}$	$asec[h](z) = acos[h]\left(\frac{1}{z}\right)$
$csc[h](z) = \frac{1}{sin[h](z)}$	$acsc[h](z) = asin[h]\left(\frac{1}{z}\right)$

Differentiationsregeln $u = u(x)$, $v = v(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$		
Name	**Funktion**	**1. Ableitung**
Faktorregel	$\alpha \cdot u$	$\alpha \cdot u'$
Summenregel	$u + v$	$u' + v'$
Produktregel	$u \cdot v$	$v \cdot u' + u \cdot v'$
Quotientenregel	$\frac{u}{v} = u(v)^{-1}$	$(v \cdot u' - u \cdot v') \cdot (v)^{-2}$
Kettenregel	$u(v)$	$u'(v) \cdot v'$
logarithmisch	u^v	$(v' \cdot ln(u) + vu'(u)^{-1})u^v$

1. Ableitung elementarer reeller Funktionen

ACHTUNG: ^ bedeutet Konstante im Exponent
und ↑ bedeutet Funktion im Exponent

$f(x)$	Code	$f'(x)$	Code
$const$		0	0
x	#	1	1
x^n	(#)^(n)	nx^{n-1}	(n*#)^(n-1)
$\sqrt{(x)} = (x)^{(0,5)}$		$0.5\,x^{-0.5}$	0.5*(#)^(-0.5)
$\sqrt[n]{x} = (x)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$			
$EXP(x)$	exp	$EXP(x)$	exp
$LN(x)$	ln	x^{-1}	#^(-1)
$LOG(x)$	log	$\left(x\,LN(10)\right)^{-1}$	(#*n(10))^(-1)
$SIN(x)$	sin	$COS(x)$	cos
$COS(x)$	cos	$-SIN(x)$	-sin
$TAN(x)$	tan	$1 + TAN^2(x)$	1+tan*tan
$ASIN(x)$	asn	$(1 - x^2)^{-0,5}$	(1-#^ (2))^(-0.5)
$ACOS(x)$	acs	$-(1 - x^2)^{-0,5}$	-(1-#^(2))^(-0.5)
$ATAN(x)$	atn	$(1 + x^2)^{-1}$	(1+#^(2))^(-1)
$SINH(x)$	snh	$COSH(x)$	csh
$COSH(x)$	csh	$SINH(x)$	snh
$TANH(x)$	tnh	$1 - TANH^2(x)$	1-tanh*tanh
$ASINH(x)$	ash	$(1 + x^2)^{-0,5}$	(1+#^(2))^(-0.5)
$ACOSH(x)$	ach	$(-1 + x^2)^{-0,5}$	(#^(2)-1)^(-0.5)
$ATANH(x)$	ath	$(1 - x^2)^{-1}$	(1-#^(2))^(-1)

Unberücksichtigte 1. Ableitungen von Funktionen			
$f(x)$	**Code**	$f'(x)$	**Code**
$COT(x)$	-	$-1(SIN^2(x))^{-1}$	-
$ACOT(x)$	-	$-(1+x^2)^{-1}$	-
$COTH(x)$	-	$1-COTH^2(x)$	-
$ACOTH(x)$	-	$-(x^2-1)^{-1}$	-
$SEC(x)$	-	$SEC(x)\cdot TAN(x)$	-
$ASEC(x)$	-	$\frac{1}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x^2-1}}$	-
$SECH(x)$	-	$-SECH(x)\cdot TANH(x)$	-
$ASECH(x)$	-	$\frac{-1}{x\cdot\sqrt{-x^2+1}}$	-
$CSC(x)$	-	$-CSC(x)\cdot COT(x)$	-
$ACSC(x)$	-	$\frac{-1}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x^2-1}}$	-
$CSCH(x)$	-	$-CSCH(x)\cdot COTH(x)$	-
$ACSCH(x)$	-	$\frac{-1}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x^2+1}}$	-

Äquivalente Darstellung unberücksichtigter Funktionen	
unberücksichtigte Funktion	äquivalente Darstellung
$COT[H](x)$	$\frac{1}{TAN[H](x)}$
$SEC[H](x)$	$\frac{1}{COS[H](x)}$
$CSC[H](x)$	$\frac{1}{SINN[H](x)}$
$ACOT[H](x)$	$ATAN[H]\left(\frac{1}{x}\right)$
$ASEC[H](x)$	$ACOS[H]\left(\frac{1}{x}\right)$
$ACSC[H](x)$	$ASIN[H]\left(\frac{1}{x}\right)$

1 Ableitungsfreie Nullstellenverfahren

Das wohl bekannteste Nullstellenverfahren für reelle Funktionen ist das Newton-Verfahren. Ist die Ableitungsfunktion bekannt, oder wie bei Polynomen leicht zu berechnen, ist das Newton-Verfahren bei einem geeignetem Startwert ein sehr gutes Verfahren. Nur ist die numerische Berechnung der ersten Ableitung alleinig aus den Funktionswerten an der Stelle $\boldsymbol{x}$ und in der Nähe bei $\boldsymbol{x+h}$ für konstantes $\boldsymbol{h}$ bei transzendenten Funktionen nicht immer genau genug und kann zu erheblichen Fehlern führen. Die Wahl von $\boldsymbol{h}$ muss also "dynamisch" erfolgen. In Abhängigkeit des Arguments $\boldsymbol{x}$ und des Funktionswertes $\boldsymbol{f(x)}$ kann ein konstantes $\boldsymbol{h}$ zu groß, aber auch zu klein sein. Dennoch erfolgt der prinzipielle Ansatz über das Newton-Verfahren:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Nun wird die erste Ableitung $\boldsymbol{f'(x_n)}$ rechtsseitig angenähert durch:

$$\boldsymbol{f'(x_n) \approx \frac{f(x_n+f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}}$$

um das nach Steffensen benannte Verfahren:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n+f(x_n)) - f(x_n)}}$$

zu erhalten.

Dabei wird zunächst $\boldsymbol{h = 0,1 + 0,01x}$ gesetzt und für den Fall, dass $\boldsymbol{|f(x)| < h}$ ist, der betragsmäßig kleinere Wert für $\boldsymbol{h}$ gewählt. Natürlich kann auch eine linksseitige Annäherung an die erste Ableitung erfolgen. Das Programm **HPFX** berechnet rechts- wie linksseitige, aber auch zentrale Ableitungen.

ACHTUNG: Prinzipiell ist bei jedem Nullstellenverfahren eine Obergrenze an Iterationen festzulegen, deren Überschreitung gleichbedeutend ist mit: **Nicht Konvergent!**

1.1 Die 1-Punkt-Verfahren $\left(x_0 ; f(x_0)\right)$ nach Kasturiarachi und Ostrowski

Abweichend von der Verfahrensvorschrift in der Originalliteratur, finden hier zentrale Ableitungen Verwendung. Dies ist wegen der Anzahl der Funktionsauswertungen zwar aufwendiger, durch eine bessere Approximation der Ableitung aber deutlich genauer.

$$h = 0,1 + 0,01x$$

$$f_0 = f(x_0)$$

IF $|f_0| < h$

$$h = f_0$$

$$f_0' = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \approx f'(x_0)$$

$$x_0^* = x_0 - \frac{f_0}{f_0'} = x_0 - \frac{2hf_0}{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}$$

Kasturiarachi Iterationsschritt:

$$x_{1,K} = x_0 - \frac{f_0^2}{f_0'[f_0 - f(x_0^*)]} = x_0 - (x_0 - x_0^*)\frac{f_0}{f_0 - f(x_0^*)}$$

Ostrowski Iterationsschritt:

$$x_{1,O} = x_0 - \left(\frac{f_0}{f_0'}\right)\frac{f(x_0^*) - f_0}{2f(x_0^*) - f_0} = x_0 - (x_0 - x_0^*)\frac{f(x_0^*) - f_0}{2f(x_0^*) - f_0}$$

- Kasturiarachi: Leap frogging Newton's method;
Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 33 (4) (2002) 521–527
- Jain; Steffensen type methods for solving non-linear equations;
Applied Mathematics and Computation 194 (2007) 527–533)
- Cordero: Steffensen type methods for solving nonlinear equations;
Journal of Computational and Applied Mathematics 236 (2012) 3058–3064)

1.2 Die 2-Punkte-Verfahren $(x_0, f(x_0))$; $(x_1, f(x_1))$

Das KANWAR-SHARMA-MAMTA-Verfahren

Dieses hybride Verfahren beruht auf dem Sekantenverfahren, das auf eine Parabel übertragen wird. Der Vorteil liegt in der Wahl des Parameters α um sowohl das Sekantenverfahren, als auch das von Kanwar-Sharma-Mamta entwickelte Verfahren zu erhalten. Durch das Radizieren kann mit dem KSM-Verfahren auch eine Näherung an eine komplexe Nullstelle ermittelt werden.

$$f_0 = f(x_0)$$

$$f_1 = f(x_1)$$

IF $|f_1| > |f_0|$

$$x_0 \Leftrightarrow x_1$$

$$f_0 \Leftrightarrow f_1$$

$$f_{1-0} = f_1 - f_0$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & ; \; Sekantenverfahren \\ 0,25 & ; \; KSM - Verfahren \end{cases}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{2(x_1 - x_0)f_1}{f_{1-0} + sign(f_{1-0})\sqrt{(f_{1-0})^2 + 4\alpha(x_1 - x_0)^2}}$$

- Kanwar, Sharma, Mamta: A new family of Secant-like method with super-linear convergence App. Math. and Comp. 171 (2005) 104–107
- Mamta, Kanwar, Kukreja, Singh: On a class of quadratically convergent iteration formulae; App. Math. and Comp. 166 (2005) 633–637

Die Verfahrensklasse:

Illinois – Pegasus – Andersen-Björck

Diese Verfahren sind dann geeignet und mit Sicherheit konvergent, wenn $\boldsymbol{f(x_0)f(x_1) \leq 0}$ gilt. Konvergenz kann aber auch dann eintreten, wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist.

$$\boldsymbol{s = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

$$\boldsymbol{x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{s}}$$

IF $\boldsymbol{f(x_2)\, f(x_1) < 0}$

$$\boldsymbol{x_0 = x_1}$$

$$\boldsymbol{f(x_0) = f(x_1)}$$

$$\boldsymbol{x_1 = x_2}$$

$$\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}$$

ELSE $\{\, \boldsymbol{f(x_2)\, f(x_1) > 0} \,\}$

- Illinois: $\boldsymbol{m = 0,5}$
- Pegasus: $\boldsymbol{m = \frac{f(x_0)}{f(x_0)+f(x_1)}}$
- Andersen-Björck: $\boldsymbol{m = \begin{cases} 1 - \frac{f(x_1)}{f(x_0)}, & wenn > 0 \\ 0,5 & , \ sonst \end{cases}}$

$$\boldsymbol{f(x_0) = mf(x_0)}$$

$$\boldsymbol{x_1 = x_2}$$

$$\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}$$

Das Dekker-Verfahren

Damit das Dekker-Verfahren sicher konvergiert, bedarf es zweier Startwerte x_0 und x_1 deren Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_1)$ verschiedene Vorzeichen besitzen. Zu Beginn der Iteration werden die Startwerte x_0 und x_1 derart geordnet, dass $f(x_1)$ dichter an Null liegt. Es gelte also: $|f(x_1)| < |f(x_0)|$.

$$\text{IF } |f(x_1)| > |f(x_0)|$$

$$x_0 \Leftrightarrow x_1$$

$$f(x_0) \Leftrightarrow f(x_1)$$

$$s = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

$$x_2 = \frac{x_1 + x_0}{2}$$

$$\text{IF } s \in [x_1 ; x_2]$$

$$x_2 = s$$

$$\text{IF } f(x_0)\, f(x_2) > 0$$

$$x_0 = x_2$$

$$f(x_0) = f(x_2)$$

$$\text{ELSE } \{ f(x_0)\, f(x_2) < 0 \}$$

$$x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

- Brent: An Algorithmus with guaranteed convergence for finding a zero of a function, *Comput. J.* 14, 422–425

Das Ridders-Verfahren

Auch das Ridders-Verfahren benötigt zur sicheren Konvergenz ein Startintervall $[x_0 ; x_2]$ dessen Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_2)$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Dabei sei $f(x_0) > 0$.

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

$$x_3 = x_1 + (x_1 - x_0) \frac{sign(f(x_0))\, f(x_1)}{\sqrt{f^2(x_1) - f(x_0)\, f(x_2)}}$$

IF $f(x_3) > 0$

$x_2 = x_3$

$f(x_2) = f(x_3)$

IF $f(x_0)\, f(x_1) > 0$

$x_0 = x_1$

$f(x_0) = f(x_1)$

ELSE $\{f(x_3) < 0\}$

$x_0 = x_3$

$f(x_0) = f(x_3)$

IF $f(x_1)\, f(x_2) > 0$

$x_2 = x_1$

$f(x_2) = f(x_1)$

Anmerkung: Besitzen $f(x_0)$ und $f(x_2)$ das gleiche Vorzeichen, so kann mit: $x_3 = x_1 + (x_1 - x_0) \frac{-sign(f(x_0) f(x_2)) sign(f(x_0))\, f(x_1)}{\sqrt{f^2(x_1) - f(x_0)\, f(x_2)}}$ eine Näherung berechnet werden, die den vom Betrag her größeren Funktionswert und das Argument ersetzt.

- Ridders: A New Algorithm for Computing a Single Root of a Real Continuous Function, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTBMS,VOL. CAS-26,N0. ll,NOVBMBER 1979

1.3 Die 3-Punkte-Verfahren

Um die Iteration eines 3-Punkte-Verfahren zu starten, bedarf es dreier Startwerte. Wenn das nicht gegeben ist und nur ein Startwert $\boldsymbol{x_1}$ vorliegt, können durch Addition oder Subtraktion einer geeigneten Größe $\boldsymbol{h}$ die fehlenden Punkte erzeugt werden. Alternativ kann auch mit einem 1-Punkt-Verfahren begonnen und über den dadurch ermittelten zweiten Punkt durch ein 2-Punkt-Verfahren der benötigte dritte Startwert erzeugt werden.

Inverse quadratische Interpolation

Im Gegensatz zu anderen quadratischen Interpolations-Verfahren, wird bei der IQI, der inversen quadratischen Interpolation, durch den Verzicht auf das Radizieren stets der Weg durch das Komplexe vermieden. Zu Beginn der Iteration werden die $\boldsymbol{x_i}$ derart sortiert, dass gilt:

$$\boldsymbol{f(x_2) \leq f(x_1) \leq f(x_0).}$$

Bezeichne: $\boldsymbol{f_i = f(x_i)}$, so ist:

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{f_1 f_2}{(f_0 - f_1)(f_0 - f_2)} x_0 + \frac{f_0 f_2}{(f_1 - f_0)(f_1 - f_2)} x_1 + \frac{f_0 f_1}{(f_2 - f_0)(f_2 - f_1)} x_2}$$

$$\boldsymbol{x_0 = x_1}$$

$$\boldsymbol{f(x_0) = f(x_1)}$$

$$\boldsymbol{x_1 = x_2}$$

$$\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}$$

$$\boldsymbol{x_2 = x_3}$$

$$\boldsymbol{f(x_2) = f(x_3)}$$

Die Sharma Familie

Die Sharma-Familie beruht auf der quadratischen Interpolation dreier Stützstellen x_i und ihrer Funktionswerte $y_i = f(x_i)$. Ausgehend von dem quadratischen Interpolationspolynom:

$$Q(x;y) = a(x-x_i)^2 + b(y-y_i)^2 + c(x-x_i) + d(y-y_i) + e = 0$$

erhält man aus den Stützstellen: $(x_2\ ;\ y_2)\ ;\ (x_1\ ;\ y_1)\ ;\ (x_0\ ;\ y_0)$

die Koeffizienten von $Q(x;y)$. Bezeichne im Folgenden:

$$h_1 = x_2 - x_1$$

$$h_2 = x_2 - x_0$$

$$\delta_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\delta_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$$

Aus den Koeffizienten:

$$c = \frac{a(h_1\delta_2 - h_2\delta_1) + b\delta_1\delta_2(h_1\delta_1 - h_2\delta_2)}{\delta_2 - \delta_1}$$

$$d = \frac{a(h_2 - h_1) + b\left(h_2\delta_2^2 - h_1\delta_1^2\right)}{\delta_2 - \delta_1}$$

Wahl der Koeffizienten a und b. Es gilt stets: $e = 0$									
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	0	1	1	0	1	2	1	-1
Kreis		Parabel		Muller		Ellipse		Hyperbel	

Anmerkung zum Muller-Verfahren: wenn $\left|\frac{y_3}{y_2}\right| > 10$ **dann setze** $x_3 = \frac{x_3 + x_2}{2}$

Erhält man die Näherung:

$$x_3 = x_2 - \frac{2y_2(by_2 - d)}{c + sign(c)\sqrt{c^2 + 4ady_2}}$$

- Müller: A Method for Solving Algebraic Equations using an Automatic Computer; Mathematical Tables and other Aids to Computation, No. 10, (1956), 208-215)
- Sharma: A Family of Methods for solving nonlinear Equation using Quadratic Interpolation; Computers and Mathematics with Applications 48 (2004) 709-714

2 Numerische Integration einer reellen Funktion

Um den Wert eines bestimmten Integrals zu berechnen, dessen Stammfunktion nicht bekannt, bzw. nur schwer zu ermitteln ist, haben sich die Gauß-Quadraturformeln bewährt. Die Stützstellen und Gewichte werden für das Intervall [-1 ; 1] berechnet und wie schon in den MATH-PACs für den HP-65 praktiziert, auf das Intervall [a ; b] transformiert.

Gauß-Legendre Knoten und Gewichte (HP 65)	
Knoten x_i	Gewichte w_i
-0,9324695142	0,1713249424
-0,6612093865	0,360761573
-0,2386191861	0,4679139346
0,2386191861	0,4679139346
0,6612093865	0,360761573
0,9324695142	0,1713249424

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i\, f\left(\frac{(b-a)x_i+a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \approx 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{(1+x_i)^2}\, f\left(a+\frac{2}{1+x_i}-1\right)$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \approx 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{(1+x_i)^2}\, f\left(a-\frac{2}{1+x_i}+1\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \approx \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\approx 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{(1+x_i)^2} \left[f\left(1-\frac{2}{1+x_i}\right) + f\left(\frac{2}{1+x_i}-1\right)\right]$$

- HP-65. MATH PAC2. Program 19A1 and 20A

Das Programm **HPOLY** verwendet die Quadraturformeln von Gauß-Kronrod. Der Vorteil liegt in der Einbettung der Stützstellen und Gewichte der Gauß-Formeln in die Kronrod-Formeln.

Die n-ten Stützstellen und die n-ten Gewichte der Gauß-Formel sind die $2n$-ten Stützstellen und die $2n$-ten Gewichte der Gauß-Kronrod-Formel.

Dadurch erhält man ohne Mehraufwand eine Abschätzung des Quadraturfehlers $\boldsymbol{err} \approx |\mathbf{K99} - \mathbf{G49}|$.

Es gilt demnach:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx} \cong \boldsymbol{K99} \pm \boldsymbol{err} = \boldsymbol{K99} \pm |\boldsymbol{K99} - \boldsymbol{G49}|$$

Die Berechnung der Stützstellen und Gewichte **G49K99** wurde mit:

https://keisan.casio.com/exec/system/1289382036

durchgeführt. Diese Internetseite war nach Mitte 2023 nicht mehr aufrufbar.

Als numerische Näherung an das tatsächliche Integral wird der Wert **K99** als exakt angenommen und der Fehler abgeschätzt durch $\epsilon \approx |\mathbf{K99} - \mathbf{G49}|$. Es gilt demnach:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx} \cong \boldsymbol{K99} \pm \epsilon = \boldsymbol{K99} \pm |\boldsymbol{K99} - \boldsymbol{G49}|$$

Das Programm **HPFX** verwendet die folgende mit dem obigen Programm ermittelte Tabelle zur Berechnung der Integrale.

Tabelle: Gauß49-Kronrod99-Quadraturformel

i	Gauß-Kronrod Knoten x_i	Kronrod Gewichte w_i	Gauß-Gewichte w_i
1	-.99980419968563872799497400360798 3	0.00052747696837833231426392216677	0
2	-.99882015060663537936183127270411 1	0.00147796392817436202085567581223501	0.00302727898892290507748069817582 7
3	-.99681981429982646940128395903600 78	0.00252187657314964968451363314444	0
4	-.99378866194416779076011385925795 36	0.00353295570148325998918676953155 99	0.00703509959008645147345067831134 8
5	-.98976423841406447106316829313 5	0.00451413316259986208363584206418 29	0
6	-.98475789591421300435929899536857 47	0.00550142039933807820404046965841 39	0.01102055103159358049750828816683 33
7	-.97875730303120668452985890273019 62	0.00649987253216648451684983017123 9	0
8	-.97176220090155538013997242150477 41	0.00748691027641404451981754599139 45	0.01496214493562465102958431912020 15
9	-.96379001813635542826110960002198 69	0.00845518563977504567011455837176 4	0
10	-.95485365867413723355524367966818 4	0.00941757222968620667623169285036 38	0.01884359585308945844445065339110 73
11	-.94495505922132947315583511299264 1	0.01037873292411660770696835693289 13	0
12	-.93410029475581014905898246063654 5	0.01132784385787802287946897255194 78	0.02264920158744667649487709642160 429
13	-.92230547545393616875542902102295 32	0.01225917487994735890765047291708 25	0
14	-.90958565582807328521301964035580 01	0.01317920682120793660565575596211 76	0.02636361892706601696094574523974 2
15	-.89594962458359342073523320182434 69	0.01409111104727054403774838521804 5	0
16	-.88140844557300891003703153581700 49	0.01498809893468029565929718742555 13	0.02997188462058382535069055807414 72
17	-.86598000431514572644425237560915 47	0.01586572369887289313036815076146 4	0
18	-.84968211984416570103488187224297 93	0.01672789855377731868231283618608 91	0.03345946679162217434248715089168 92
19	-.83252850148746016851726331636963 17	0.01757687264124482623844623185901 66	0
20	-.81453442735985543153950078776477 7	0.01840775385198258202811837766095 03	0.03681232096300068981946723669888 23
21	-.79572032076252483813605680991637 64	0.01921693298265564421167631558968 52	0
22	-.77610689434544663501814281224845 6	0.02000706438592749292653939169448 15	0.04001694576637302136860503674310 33
23	-.75571189036951430824565468437900 14	0.02077985351985616933366176631727 53	0
24	-.73455425423740269621367421285852 5	0.02153148180778168675381817005041 26	0.04306043698125959798834548400103 85
25	-.71265706670500883084742058715431 7	0.02225891393012994663599378540288 54	0
26	-.69004382442513211350475180727494 19	0.02296412163116801662980325061670 28	0.04593053935559585354249961997212 767
27	-.66673570084157166786611646784242 5	0.02364849437386313502760673815106 1	0
28	-.64275483241923766405685694858390 01	0.02430890292981194970860949560862 93	0.04861569588782824027765119728786 85
29	-.61812681780087929916114671306875 2	0.02494273121163801378060088498540 78	0
30	-.59287769410890071245586433679262 85	0.02555156762989839679623681311035 2	0.05110509433014459067462280604931 86
31	-.56703154949539173286310781544294 1	0.02613662957271705619968185924750 4	0
32	-.54061324699172606655822546722943 6	0.02669527310715803774272137075000 2	0.05338871070825896852794293373017 62
33	-.51365062840173438231110088432478 2	0.02722520580879671199600159773394 19	0
34	-.48617194145249204217697609605857 51	0.02772780755086887283813378514614 94	0.05545734967480358869043158148269 807
35	-.45820369153902985484956086446138 14	0.02820422057002920052135774954428 7	0
36	-.42977299334157652465858414180742 3	0.02865216671090199984955207682324	0.05730268153018747548516459235081 65
37	-.40090957392927988093732238891022 03	0.02906961401215047569308767229165 18	0
38	-.37164350126228488886373454094696 1	0.02945784540564207340755867638755 07	0.05891727576002726602452765074249 25
39	-.34200319599185596010783637383245 31	0.02981799732371075218964770203545 47	0
40	-.31201753211974876220786067650641 63	0.03014808106679993314543067125794 2	0.06029463095315201730310611687554 16
41	-.28171770824102941787746914656382 8	0.03044627973968588773856339038 66	0
42	-.25113517861257727350715594282461 13	0.03071385585773908339191631228468 087	0.06142920097919293629682664614030 107
43	-.22029976550980533532426337303585 89	0.03095199261556639252752228732491 4	0
44	-.18924159246181358648531017385998 65	0.03115893749659741586964716279259 5	0.06231641732005726740107682521594 97
45	-.15799287766436835866600365561302 89	0.03133305259123105975886144250680 09	0
46	-.12658599726967205106798528857553 62	0.03147563582699890351851664657025 36	0.06295270746519569947439955578289 101
47	-.09505164998612337566003508932836 8	0.03158795945868597316142385001115 78	0
48	-.06342068498268678602883482087848 497	0.03166846605661171584461640770856 52	0.06333550929649174859083692740009 05
49	-.03172586345907315363081936526863 07	0.03171566450397334404101389723030 2	0
50	0	0.03173093139852189440905270524373 75	0.06346328140479059771825346787952 96
51	0.03172586345907315363081936526863 07	0.03171566450397334404101389723030 19	0
52	0.06342068498268678602883482087848 5	0.03166846605661171584461640770856 52	0.06333550929649174859083692740009 052
53	0.09505164998612337566003508932836 8	0.03158795945868597316142385001115 8	0
54	0.12658599726967205106798528857553 62	0.03147563582699890351851664657025 36	0.06295270746519569947439955578289 101
55	0.15799287766436835866600365561302 9	0.03133305259123105975886144250680 1	0
56	0.18924159246181358648531017385998 65	0.03115893749659741586964716279259 5	0.06231641732005726740107682521594 97
57	0.22029976550980533532426337303585 9	0.03095199261556639252752228732491 36	0

58	0.25113517861257727350715594282461 13	0.03071385585773908339196312284680 87	0.06142920097919293629682664614030107
59	0.28171770824102941787746914656383 28	0.03044627973968588773856339038660 02	0
60	0.31201753211974876220786067650641 6	0.03014808106679993314543067125794 2	0.06029463095315201730310611687554159
61	0.34200319599185596010783637383245 31	0.02981799732371075218964770203545 5	0
62	0.37164350126228488886373454094696 05	0.02945784540564207340755867638755 07	0.05891727576002726602452765074249252
63	0.40090957392927988093732238891022 03	0.02906961401215047569308767229165 2	0
64	0.42977299334157652465858414180742 3	0.02865216671090199984955207682324	0.05730268153018747548516459235081654
65	0.45820369153902985484956086446138 14	0.02820422057002920052135774954428 71	0
66	0.48617194145249204217697609605857 51	0.02772780755086887283813378516414 94	0.05545734967480358869043158148269807
67	0.51365062840173438231110088432478 21	0.02722520580879671199600159773394 19	0
68	0.54061324699172606655822546722943 59	0.02669527310715803774272137075000 2	0.05338871070825896852794293373017621
69	0.56703154949539173286310781544294 13	0.02613662957271705619968185924750 35	0
70	0.59287769410890071245586433679262 85	0.02555156762989839679623681311035 2	0.05110509433014459067462280604931856
71	0.61812681780087929916114671306875 17	0.02494273121163801378060088498540 78	0
72	0.64275483241923766405685694858 39	0.02430890292981194970869049560862 9	0.04861569588782824027765119728786853
73	0.66673570084157166786611646784242 51	0.02364849437386313502760673815106 1	0
74	0.69004382442513211350475180727494 2	0.02296412163116801662980325061670 28	0.04593053935559585354249961997212767
75	0.71265706670500883084742058715431 69	0.02225891393012994663599378540288 5	0
76	0.73455425423740269621367421285852 49	0.02153148180778168675381817005041 26	0.04306043698125959798834548400103 85
77	0.75571189036951430824565468437900 14	0.02077985351985616933366176631727 5	0
78	0.77610689434544663501814281224845 61	0.02000706438592749292653939169448 15	0.04001694576637302136860503674310332
79	0.79572032076252483813605680991637 64	0.01921693298265564421167631558968 52	0
80	0.81453442735985543153950078776477 7	0.01840775385198258202811837766095 03	0.03681232096300068981946723669888 23
81	0.83252850148746016851726331636963 2	0.01757687264124482623844623185901 66	0
82	0.84968211984416570103488187224297 93	0.01672789855377731868231283618608 9	0.03345946679162217434248715089168 92
83	0.86598000431514572644425237560915 47	0.01586572369887289313036815076146 4	0
84	0.88140844557300891003703153581700 49	0.01498809893468029565929718742555 1	0.02997188462058382535069055807414 72
85	0.89594962458359342073523320182434 69	0.01409111104727054403774838521804 48	0
86	0.90958565582807328521301964035580 01	0.01317920682120793660565575596211 8	0.02636361892706601696094574523974 2
87	0.92230547545393616875542901022295 3	0.01225917487994735890765047291708 25	0
88	0.93410029475581014905898246063654 5	0.01132784385787802287946897255194 78	0.02264920158744667649877096421604 29
89	0.94495505922132947315583511299264 07	0.01037873292411660770696835693289 1	0
90	0.95485365867413723355524367966818 44	0.00941757222968620667623169285036 38	0.01884359585308945844445065339110 73
91	0.96379001813635542826110960002198 69	0.00845518563977504567011455837176 36	0
92	0.97176220090155538013997242150477 4	0.00748691027641404451981754599139 445	0.01496214493562465102958431912020 15
93	0.97875730303120668452985890273019 62	0.00649987253216648451684983017123 95	0
94	0.98475789591421300435929899536857 47	0.00550142039933807820404046965841 39	0.01102055103159358049750828816683 33
95	0.98976423841406447106316829313500 03	0.00451413316259986208363584206418 29	0
96	0.99378866194416779076011385925795 4	0.00353295570148325998918676953155 99	0.00703509959008645147345067831134 8
97	0.99681981429982646940128395903600 78	0.00252187657314964968451363314444 01	0
98	0.99882015060663537936183127270411 1	0.00147796392817436202085567581223 5	0.00302727898892290507748069817582 7
99	0.99980419968563872799497400360798 27	0.00052747696837833231426392216677	0

- **Laurie: CALCULATION OF GAUSS-KRONROD QUADRATURE RULES, MATHEMATICS OF COMP., Volume 66, Number 219, July 1997, Pages 1133–1145**
- **Calvetti: COMPUTATION OF GAUSS-KRONROD QUADRATURE RULES, MATHEMATICS OF COMPUTATION, Volume 69, Number 231, Pages 1035–1052 (2000)**
- **Notaris: GAUSS-KRONROD QUADRATURE FORMULAE, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Volume 45, pp. 371–404, 2016, Kent State University.**

3 Numerische Differentiation reeller Funktionen

Die Berechnung der Ableitungen ist erheblich komplizierter als die Berechnung der Integrale. Ist die abzuleitende Funktion nicht "glatt" genug, können die numerischen Resultate ungenau werden. Zweckmäßigerweise werden zur numerischen Berechnung der n-ten Ableitung von $\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$ die rechtsseitige Näherung $\boldsymbol{f_r^{(n)}(x)}$, und/oder die linksseitige Näherung $\boldsymbol{f_l^{(n)}(x)}$ bestimmt. Beide Näherungen sollten sehr dicht beieinander liegen. Die links- und rechtsseitigen Näherungen lassen sich durch die Gewichte $\boldsymbol{w_{i,r}^{(n)}}$ bzw. $\boldsymbol{w_{i,l}^{(n)}}$ und ein kleines, aber nicht zu kleines, geeignetes $\boldsymbol{h}$ berechnen. Es gilt:

$$\boldsymbol{f_r^{(n)}(x)} \approx \frac{1}{h^k} \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{w_{i,r}^{(n)}}\, \boldsymbol{f(x+ih)} \text{ und}$$

$$\boldsymbol{f_l^{(n)}(x)} \approx \frac{1}{h^k} \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{w_{i,l}^{(n)}}\, \boldsymbol{f(x-ih)}$$

Sofern beide Annäherungen existieren, lässt sich die numerische Näherung verbessern, wenn der Mittelwert aus den links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x) \approx f_{r,l}^{(n)}(x) = \frac{f_r^{(n)}(x)+f_l^{(n)}(x)}{2}} \text{ gewählt wird.}$$

Für die Gewichte gilt:

$$\boldsymbol{w_{i,l}^{(n)} = \begin{cases} w_{i,r}^{(n)}, falls\ n\ gerade \\ -w_{i,r}^{(n)}, falls\ n\ ungerade \end{cases}}$$

Eine Herleitung der Formeln und die Berechnung der Gewichte findet man unter:

https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient

Über die Konstruktion der Gleichungssysteme zur Berechnung der Gewichte rechts- und linksseitiger, sowie zentraler Ableitungen

Es seien für die Funktion $f(x)$ die Funktionswerte an allen Stützstellen $(\boldsymbol{x \pm ih})$ $\boldsymbol{i = -n, \dots 0, \dots, n,}$ bekannt, dann können die Ableitungen bis zum $\boldsymbol{2n}$**-ten** Grad berechnet werden. Für die Berechnung der $\boldsymbol{n}$**-ten** Ableitung werden der Funktionswert $f(x)$ und mindestens $\boldsymbol{n}$ weitere Stützstellen benötigt.

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ zur Berechnung der Gewichte besitzt die Struktur:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\boldsymbol{n} & \leftrightarrow & -\mathbf{3} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \leftrightarrow & \boldsymbol{n} \\ (-\boldsymbol{n})^2 & \leftrightarrow & \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \leftrightarrow & (\boldsymbol{n})^2 \\ (-\boldsymbol{n})^3 & \leftrightarrow & -\mathbf{27} & -\mathbf{8} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{27} & \leftrightarrow & (\boldsymbol{n})^3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (-\boldsymbol{n})^n & \leftrightarrow & (-\mathbf{3})^n & (-\mathbf{2})^n & (-\mathbf{1})^n & \mathbf{0} & \mathbf{1} & (\boldsymbol{n})^n & (\mathbf{3})^n & \leftrightarrow & (\boldsymbol{n})^n \end{pmatrix}$$

Für eine links- bzw. rechtsseitige Ableitung wird die Untermatrix

$$\boldsymbol{A_l} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\boldsymbol{n} & \leftrightarrow & -\mathbf{3} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ (-\boldsymbol{n})^2 & \leftrightarrow & \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ (-\boldsymbol{n})^3 & \leftrightarrow & -\mathbf{27} & -\mathbf{8} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (-\boldsymbol{n})^n & \leftrightarrow & (-\mathbf{3})^n & (-\mathbf{2})^n & (-\mathbf{1})^n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\boldsymbol{A_r} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \leftrightarrow & \boldsymbol{n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \leftrightarrow & (\boldsymbol{n})^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{27} & \leftrightarrow & (\boldsymbol{n})^3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & (\boldsymbol{n})^n & (\mathbf{3})^n & \leftrightarrow & (\boldsymbol{n})^n \end{pmatrix} \text{ gewählt.}$$

Unabhängig von der Wahl der auch gleitenden (Unter-)Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt stets: $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar und das Gleichungssystem lösbar.

Die Gleichungssysteme für links- und rechtsseitige Gewichte sind:

$$\boldsymbol{A_l}\begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{-n}} \\ \boldsymbol{\downarrow} \\ \boldsymbol{w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\downarrow} \\ \boldsymbol{m!} \\ \boldsymbol{\uparrow} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \text{ für die linksseitige m-te Ableitung } \boldsymbol{f_l^{(m)}(x)}$$

$$\boldsymbol{A_r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{w_0} \\ \boldsymbol{\downarrow} \\ \boldsymbol{w_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\downarrow} \\ \boldsymbol{m!} \\ \boldsymbol{\uparrow} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \text{ für die rechtsseitige m-te Ableitung } \boldsymbol{f_r^{(m)}(x)}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{-n}} \\ \boldsymbol{\downarrow} \\ \boldsymbol{w_0} \\ \boldsymbol{\downarrow} \\ \boldsymbol{w_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\downarrow} \\ \boldsymbol{m!} \\ \boldsymbol{\uparrow} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \text{ für die zentrale m-te Ableitung } \boldsymbol{f^{(m)}(x)}$$

Hinweis: Für die m-te Ableitung steht $\boldsymbol{m!}$ an $(m+1)$-ter Stelle.

BEISPIEL: Gewichte für die 3. Ableitung mit 5 Stützstellen

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{16} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-64} & \boldsymbol{-27} & \boldsymbol{-8} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{256} & \boldsymbol{81} & \boldsymbol{16} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{-4}} \\ \boldsymbol{w_{-3}} \\ \boldsymbol{w_{-2}} \\ \boldsymbol{w_{-1}} \\ \boldsymbol{w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{-4}} \\ \boldsymbol{w_{-3}} \\ \boldsymbol{w_{-2}} \\ \boldsymbol{w_{-1}} \\ \boldsymbol{w_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{16} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-64} & \boldsymbol{-27} & \boldsymbol{-8} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{256} & \boldsymbol{81} & \boldsymbol{16} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{-1}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1,5} \\ \boldsymbol{-7} \\ \boldsymbol{12} \\ \boldsymbol{-9} \\ \boldsymbol{2,5} \end{pmatrix}$$

Dieses Ergebnis findet sich als | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -14 | 24 | -18 | 5 | in der

Tabelle der Gewichte der rechts- und linksseitigen Ableitungen für $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ und $f^{(4)}(x)$

f (n) (x)	i	DIV	w_{-8}	w_{-7}	w_{-6}	w_{-5}	w_{-4}	w_{-3}	w_{-2}	w_{-1}	w_0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	8	840	105	-960	3920	-9408	14700	-15680	11760	-6720	2283
1	7	840	0	-120	980	-3528	7350	-9800	8820	-5880	2178
1	6	60	0	0	10	-72	225	-400	450	-360	147
1	5	60	0	0	0	-12	75	-200	300	-300	137
1	4	12	0	0	0	0	3	-16	36	-48	25
1	3	6	0	0	0	0	0	-2	9	-18	11
1	2	2	0	0	0	0	0	0	1	-4	3
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
2	8	5040	3267	-29664	120008	-284256	435330	-448672	312984	-138528	29531
2	7	180	0	-126	1019	-3618	7380	-9490	7911	-4014	938
2	6	180	0	0	137	-972	2970	-5080	5265	-3132	812
2	5	12	0	0	0	-10	61	-156	214	-154	45
2	4	12	0	0	0	0	11	-56	114	-104	35
2	3	1	0	0	0	0	0	-1	4	-5	2
2	2	1	0	0	0	0	0	0	1	-2	1
3	8	240	469	-4216	16830	-39128	58280	-57384	36706	-13960	2403
3	7	120	0	-232	1849	-6432	12725	-15560	11787	-5104	967
3	6	8	0	0	15	-104	307	-496	461	-232	49
3	5	4	0	0	0	-7	41	-98	118	-71	17
3	4	2	0	0	0	0	3	-14	24	-18	5
3	3	1	0	0	0	0	0	-1	3	-3	1
4	8	240	967	-8576	33636	-76352	109930	-102912	61156	-21056	3207
4	7	6	0	-21	164	-555	1056	-1219	852	-333	56
4	6	6	0	0	17	-114	321	-484	411	-186	35
4	5	1	0	0	0	-2	11	-24	26	-14	3
4	4	1	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1

- Fornberg: Generation of Finite Difference Formulason Arbitrarily Spaced Grids, MATHEMATICS OF COMPUTATION VOLUME 51, NUMBER 184 OCTOBER 1988

Mit Hilfe des Programms: ***https://matrixcalc.org/de/***
wurde berechnet:

Tabelle der Gewichte der rechts- und linksseitigen Ableitungen für $f^{(5)}(x)$, $f^{(6)}(x)$, $f^{(7)}(x)$ und $f^{(8)}(x)$

f (n) (x)	i	DIV	w_{-8}	w_{-7}	w_{-6}	w_{-5}	w_{-4}	w_{-3}	w_{-2}	w_{-1}	w_0
5	8	6	35	-305	1170	-2581	3580	-3195	1790	-575	81
5	7	6	0	-25	190	-621	1130	-1235	810	-295	46
5	6	2	0	0	5	-32	85	-120	95	-40	7
5	5	1	0	0	0	-1	5	-10	10	-5	1
6	8	4	23	-196	732	-1564	2090	-1788	956	-292	39
6	7	1	0	-3	22	-69	120	-125	78	-27	4
6	6	1	0	0	1	-6	15	-20	15	-6	1
7	8	2	7	-58	210	-434	560	-462	238	-70	9
7	7	1	0	-1	7	-21	35	-35	21	-7	1
8	8	1	1	-8	28	-56	70	-56	28	-8	1

Um die Genauigkeit der Gewichte exakt zu bestimmen, muss in Ganzzahlarithmetik mit echten Brüchen gerechnet werden. Arithmetik in Dezimalzahldarstellung führt zu Rundungsfehlern. Dadurch scheiden iterative Verfahren, die sich schrittweise an die tatsächliche Lösung (der Gewichte) nähern, aus. Die Gewichte müssen durch ein "direktes" Verfahren berechnet werden.

Es gilt: Je glatter die Funktion, desto mehr Stützstellen können gewählt werden. Das Finden eines geeigneten Wertes für h kann nur durch jeweiliges Ausprobieren erfolgen, da ein zu großes h bei vielen Stützstellen eine zu große Umgebung darstellt. Ist h zu klein gewählt, gibt es Auslöschungs- und Rundungsfehler. Eine symbolische Differentiation ist und bleibt das Maß aller Dinge.

Um Ableitungen höheren Grades als 8 gesichert zu berechnen, sollte auf zentrale Gewichtung zurückgegriffen werden. Dadurch sind die Elemente der zu invertierenden Matrix vom Betrag her kleiner, als bei nur links- oder rechtsseitigen Berechnungen und die Berechnung kann in Brucharithmetik erfolgen.

Gewichte für die zentrale Ableitung bis $f^{(10)}(x)$

$f^{(n)}(x)$	i	DIV	VZ	w_{-8}	w_{-7}	w_{-6}	w_{-5}	w_{-4}	w_{-3}	w_{-2}	w_{-1}	w_0
10	17	2016	id	-67	1324	-12408	72548	-289268	820428	-1698760	2611876	-3011346
9	17	5040	ch	134	-2317	18612	-90685	289268	-615321	849380	-652969	0
10	13	12	id	0	0	-5	72	-450	1640	-3915	6480	-7644
9	13	4	ch	0	0	1	-12	60	-164	261	-216	0
8	13	360	id	0	0	31	-492	3606	-15100	39825	-69912	84084
7	13	480	ch	0	0	-31	410	-2404	7550	-13275	11652	0
10	11	1	Id	0	0	0	1	-10	45	-120	210	-252
9	11	2	ch	0	0	0	-1	8	-27	48	-42	0
8	11	3	Id	0	0	0	-1	13	-69	204	-378	462
7	11	24	ch	0	0	0	5	-52	207	-408	378	0
6	11	240	Id	0	0	0	13	-190	1305	-4680	9690	-12276
5	11	288	ch	0	0	0	-13	152	-783	1872	-1938	0
4	11	15120	Id	0	0	0	-82	1261	-9738	52428	-140196	192654
3	11	30240	ch	0	0	0	205	-2522	14607	-52428	70098	0
2	11	25200	Id	0	0	0	8	-125	1000	-6000	42000	-73766
1	11	12600	ch	0	0	0	-10	125	-750	3000	-10500	0
8	9	1	id	0	0	0	0	1	-8	28	56	70
7	9	2	ch	0	0	0	0	-1	6	-14	14	0
6	9	4	id	0	0	0	0	-1	12	-52	116	-150
5	9	6	ch	0	0	0	0	1	-9	26	-29	0
4	9	240	id	0	0	0	0	7	-96	676	-1952	2730
3	9	240	ch	0	0	0	0	-7	72	-338	488	0
2	9	5040	id	0	0	0	0	-9	128	-1008	8064	-14350
1	9	840	ch	0	0	0	0	3	-32	168	-672	0

Bedeutung von VZ: VZ = id bedeutet, dass die Vorzeichen von w_i und w_{-i} identisch und bei VZ = ch verschieden sind.

Höhere rechts- und linksseitige Ableitungen mit bis zu 10 Stützstellen

Online Applikationen zur Matrizenrechnung findet man hier:

https://matrixcalc.org/de/

https://matrix.reshish.com/de/.

Eine gute Einführung in das Thema "Berechnung der Gewichte" findet man bei:

https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient

https://web.media.mit.edu/~crtaylor/calculator.html

Mit diesen Programmen konnte folgende Tabelle erstellt werden.

Gewichte rechts- und linksseitiger Ableitungen für $f^{(4)}(x)$ bis $f^{(10)}(x)$.

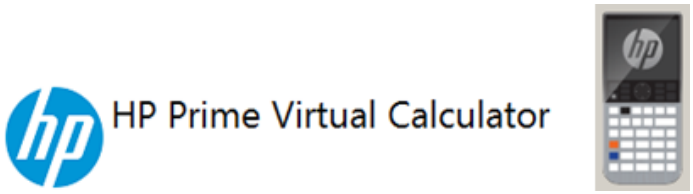
$f^{(n)}(x)$	i	DIV	W_{-10}	W_{-9}	W_{-8}	W_{-7}	W_{-6}	W_{-5}	W_{-4}	W_{-3}	W_{-2}	W_{-1}	W_0
9	9	1	0	-1	9	-36	84	-126	126	-84	36	-9	1
8	9	1	0	-40	370	-1520	3640	-5600	5740	-3920	1720	-440	50
7	9	12	0	-91	861	-3624	8904	-14070	14826	-10416	4704	-1239	145
6	9	4	0	-36	347	-1492	3756	-6100	6626	-4812	2252	-616	75
5	9	144	0	-1069	10461	-45804	117876	-196638	220614	-166476	81444	-23421	3013
4	9	240	0	-1068	10579	-47024	123348	-210920	244498	-192624	99604	-460020	4275
10	10	1	1	-10	45	-120	210	-252	210	-120	45	-10	1
9	10	2	9	-92	423	-1152	2058	-2520	2142	-1248	477	-108	11
8	10	3	29	-302	1416	-3936	7182	-8988	7812	-4656	1821	-422	44
7	10	24	315	-3332	15897	-45048	83958	-107520	95802	-58632	23583	-5628	605
6	10	240	3013	-32290	156405	-451080	858090	-1125276	1030290	-650280	270705	-67090	7513

Bei den grün unterlegten Zeilen sind die Vorzeichen von w_i und w_{-i} verschieden. Bei weißen Zeilen sind sie identisch.

Anmerkung: Die Tabellen in diesem Dokument enthalten nur ein Teil der verwendeten Daten des Programms **HPFX**. Das Programm berechnet "nur" bis zur 8. Ableitung, verwendet aber optional auch die jeweils minimale Anzahl an Stützstellen.

Symbolische Differentiation (mit der HP-Prime APP)

Mit der herunterladbaren und für Windows kostenlosen App



https://www.hp-prime.de/de/category/15-software

kann eine **EQN** behelfsweise symbolisch differenziert werden.

Mit **Print** , **Copy** , **f(x)** und **STRG "C"** wird die **EQN** kopiert und mit: Units C , $\frac{\partial \square}{\partial \square}$, $\frac{\partial \square}{\partial \square}$, $\frac{\partial \square}{\partial x}$, **STRG "V"** in die Anzeige des HP-PRIME eingefügt. Durch Enter ≈ wird die symbolische Ableitung gemäß den Differentiationsregeln:

Differentiationsregeln für EQN $f = f(x)\,, u = u(x)\,, v = v(x)\,, \alpha \in \mathbb{R}$		
Name	**Funktion**	**1. Ableitung**
Faktorregel	$\alpha \cdot u$	$\alpha \cdot u'$
Summenregel	$u + v$	$u' + v'$
Produktregel	$u \cdot v$	$v \cdot u' + u \cdot v'$
Quotientenregel	$\frac{u}{v} = u(v)^{-1}$	$(v \cdot u' - u \cdot v') \cdot (v)^{-2}$
Kettenregel	$u(v)$	$u'(v) \cdot v'$
logarithmisch	u^v	$(v' \cdot ln(u) + vu'(u)^{-1})u^v$

auf die in einer **EQN** verwendeten Funktionengruppen:

+ - * /

SQRT EXP LOG LN (A)SIN(H) (A)COS(H) (A)TAN(H)

ausgeführt.

4 Plotten: Das “interessante“ Intervall

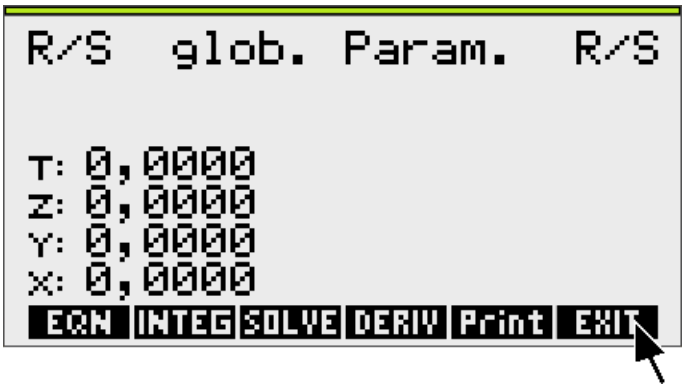
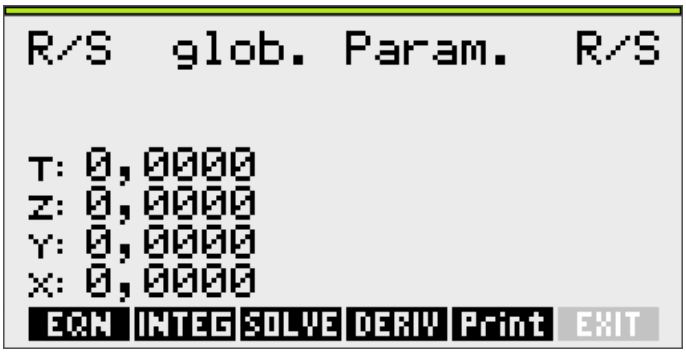
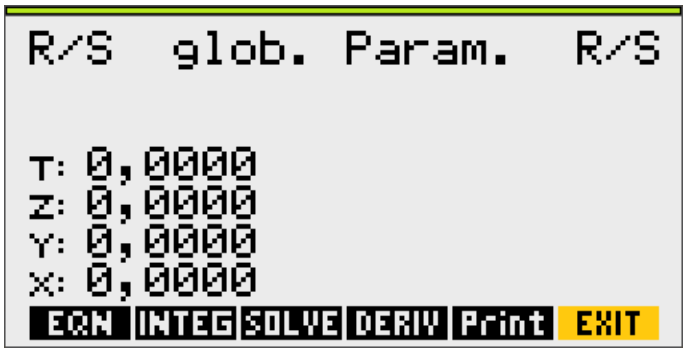
Zur Vorgabe der Intervallgrenze wird angenommen, dass die Funktion, oder EQN in Zusammenhang mit einer Winkelfunktion steht. Deshalb ist als Intervallgrenze $\mathbf{I} = [\mathbf{0}\,, \mathbf{2\pi}]$ vorgegeben. Dabei kann die Funktion EVAL bei einer EQN zu einem Fehler führen, die zu einem sofortigen Programmende führt. Bei jedem Wiederaufruf von HPFX wird dann das Intervall $\mathbf{I}$ solange verkleinert, bis der zu dem Fehler führende Wert (hoffentlich) nicht mehr im Intervall $\mathbf{I}$ enthalten ist. Bei einer Beendigung des Programms mit **EXIT** wird der Fehlermarker gelöscht.

Um einen Funktionsplot im Display vernünftig darzustellen, muss zur Orientierung die X-Y-Achse im Display erscheinen. Deshalb sollte für die **PLOT**-Funktion das Intervall der X-Achse $[\boldsymbol{x}_-\,;\,\boldsymbol{x}_+]$ links von der Null beginnt und rechts von der Null endet.

Um für die Y-Achse ein Intervall vorzugegeben, werden zu allen Argumenten $\boldsymbol{x_i}$ die Funktionswerte $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$ berechnet. Das Intervall $[\boldsymbol{Y}_-\,;\,\boldsymbol{Y}_+]$ mit $\boldsymbol{Y}_- = \boldsymbol{min}\left(\mathbf{0}\,;\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})\right)$ und $\boldsymbol{Y}_+ = \boldsymbol{max}\left(\mathbf{0}\,;\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})\right)$ legt dann den druckbaren Bereich fest. In einer Umgebung von Polstellen kann es vom Betrag her zu sehr großen Intervallgrenzen kommen. Nach einer Anpassung der Minimal- und Maximalwerte sollte dann etwa 80% der Kurve im druckbaren Bereich erscheinen und die zu großen, sowie die zu kleinen Werte am oberen, bzw. unteren Displayrand ausgegeben werden.

HINWEIS: Um den Grenzfall des leeren Intervalls $\mathbf{I} = [\mathbf{0}\,;\mathbf{0}]$ auszuschließen, sollten die jeweiligen unteren Intervallgrenzen mindestens um den Wert eines Pixels nach links und die oberen Intervallgrenzen um den Wert eines Pixels nach rechts verschoben werden. Zusätzlich kann dann für ein Intervall die betragsmäßig kleinere Intervallgrenze gegen einen definierten Bruchteil der betragsmäßig größeren Intervallgrenze geprüft und optional dadurch ersetzt werden.

5 Bebilderte Kurzanleitung der HPFX-Funktionen

Aktion	Handbuch
MENU-Taste “EXIT“ drücken 	
“SHIFT“ und “EXIT“ drücken 	

FEHLER BEIM PROGRAMMAUFRUF

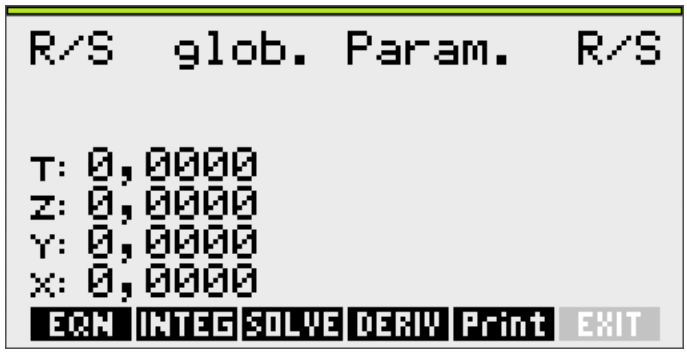
Wenn nach dem Aufruf von **HPFX** nicht der “Startbildschirm“, sondern ein beliebig anderer “Bildschirm“, oder eine “Fehlermeldung“ erscheint, dann sollte ein erneuter Aufruf von **HPFX** erfolgreich sein und den “Startbildschirm“ anzeigen. Ist das nicht der Fall, dann sollten in der Datei **“HPReg“** die Einträge “1:1“ und “1:4“ auf “ “ (blank) gesetzt werden.
Bleibt auch das erfolglos, hilft auf jeden Fall “CLV HPReg“ CLV HPReg und ein erneuter Aufruf des Programms **HPFX**.

FEHLER IN DER PROGRAMMAUSFÜHRUNG

Bei einer EQN kann die Funktion EVAL zu einem Überlauf führen und damit das Programm **HPFX** beenden. Bei jedem erneuten Wiederaufruf von **HPFX** wird das vorgegebene Intervall der EQN stets verkleinert.

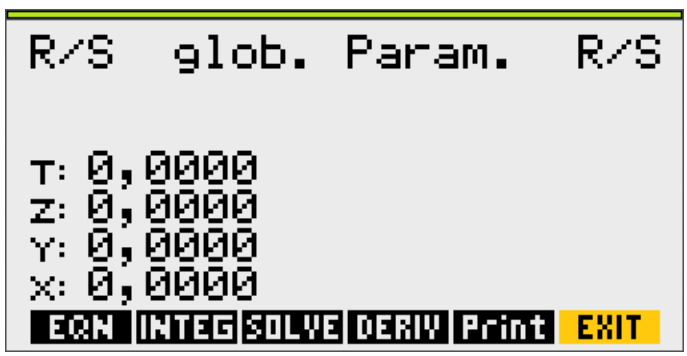
Initialisierung der HPReg-Matrix

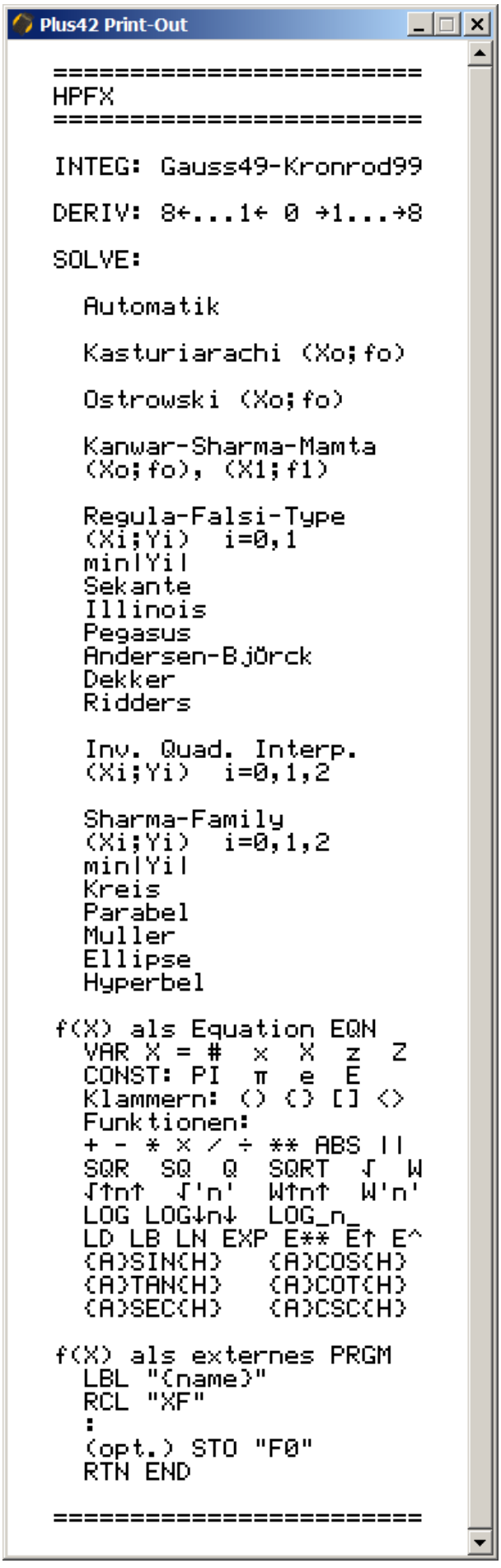
Oder wenn das Programm **HPFX** der Taste f(x) zugewiesen ist:



Existiert bisher keine **HPReg**-Datei, dann wird sie mit EXIT angelegt.

Formeln und Funktionen des Programms HPFX





HPFX: Equation EQN oder Programm PRGM

```
R/S  glob. Param.  R/S

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
 EQN INTEG SOLVE DERIV Print EXIT
```

```
EQN or ext. PRGM?

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
 EQN        gOGL       PRGM
```

```
Use SKIN: HP-41EQN or:
Write Equation direct



1/(1-COS(#)+0,25)_
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
```

R/S

```
R/S  glob. Param.  R/S

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
 EQN INTEG SOLVE DERIV Print EXIT
```

ACHTUNG: Eine mehr als 44 Zeichen lange EQN wird extern geschrieben und mit **STRG "C"** und **STRG "V"** in das X-Register des PLUS42 kopiert.

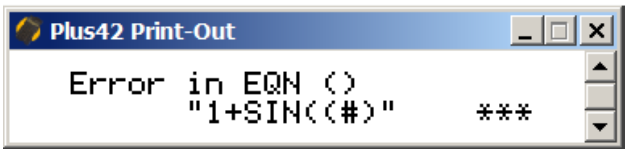
Ein problemloser Fehlerhinweis auf EQNchek wird angezeigt durch:

```
Err. EQNchek = ...

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
     M   E   N   U
```

Die Programmfortsetzung kann auch durch R/S erfolgen.

Ein **PARSE** Fehler führt zu:

```
Error in EQN ()


T: 0
Z: 0
Y: 0
X: "1+SIN((#)"
```



Ein **EVAL** Fehler führt zu:

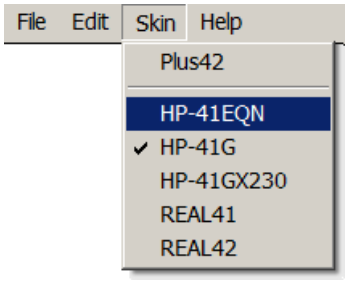
```
Nonexistent
      1+▶SINU(#)


T: 1
Z: 1  i1
Y: 1
X: "SINU"
```

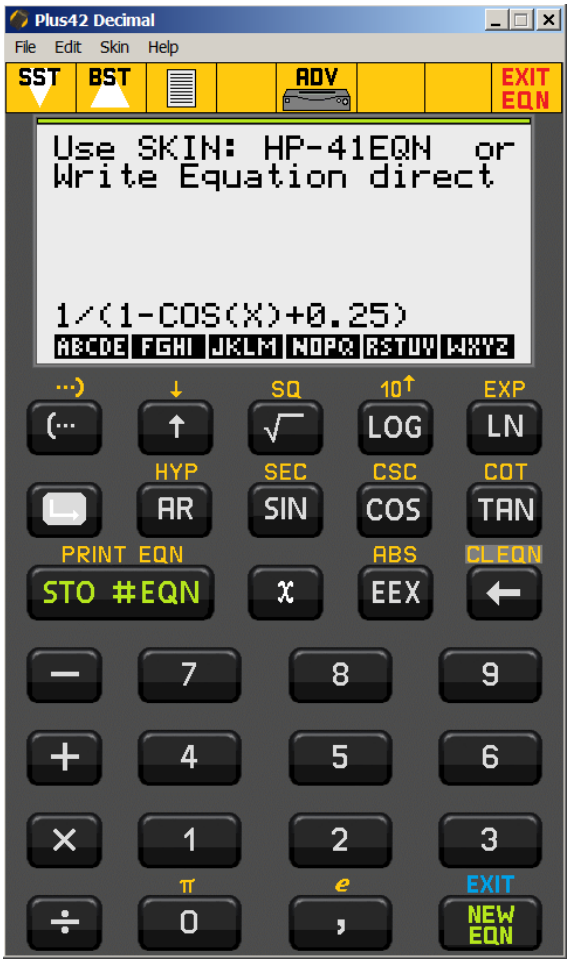
Bei **PARSE-** und **EVAL** Fehlern führt zweifaches R/S zurück zum Menu.

HPFX: Equation. SKIN: HP-41EQN

```
Use SKIN: HP-41EQN  or
Write Equation direct


1/(1-COS(X)+0.25)
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
```

Selektiere SKIN HP-41EQN





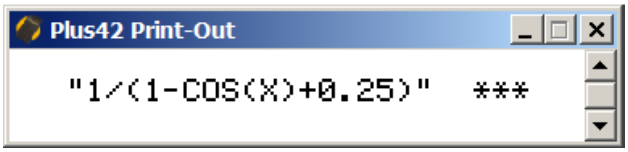
NEW EQN

```
Equation = ?


T: 0
Z: 0
Y: 0
X: ""
```

Die Eingabe der Funktion erfolgt **NUR** über den **Taschenrechner** und **NIE** über die **Tastatur** des Laptops.

```
{ HOME }


T: 0
Z: 0
Y: 0
X: "…/(1-COS(X)+0.25)"
```

PRINT EQN



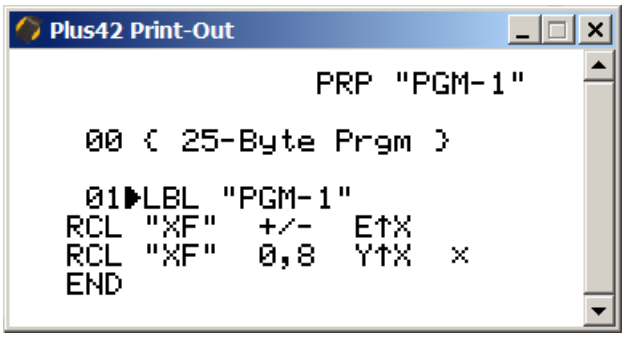
STO #EQN

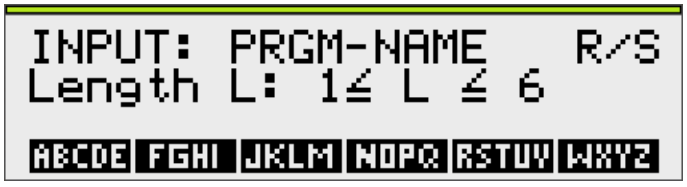
```
Equation #EQN saved
Change SKIN & R/S


T: "…/(1-COS(X)+0.25)"
Z: 1
Y: 0
X: "1/(1-COS(X)+0.25)"
```

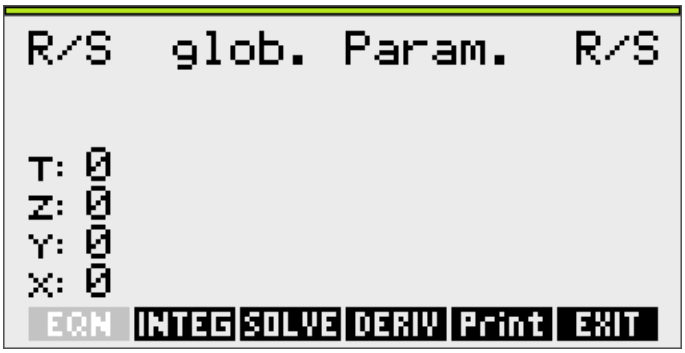
HPFX: Equation EQN oder Programm PRGM

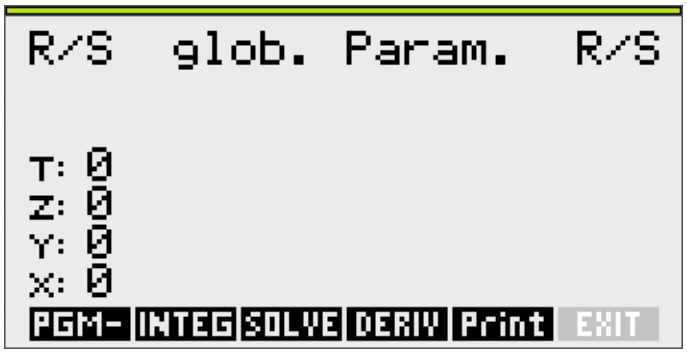
$$f(x) = e^{-x}x^{0,8}$$

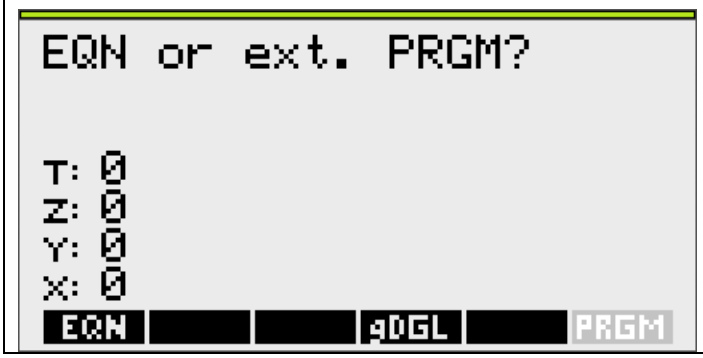
PRP "PGM-1"



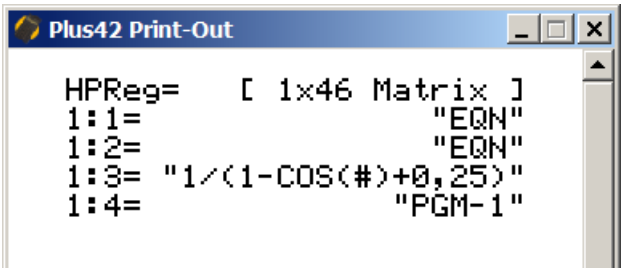






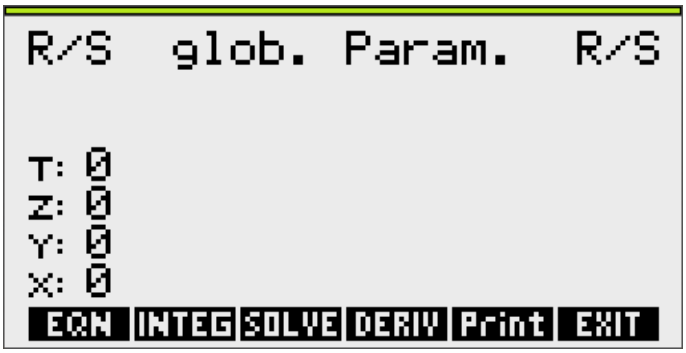


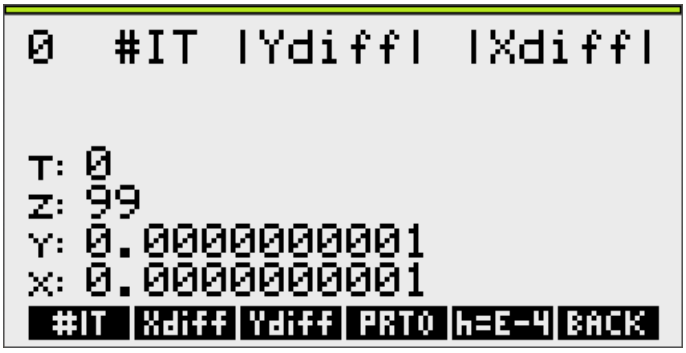
PRV "HPReg"



HINWEIS: Aus WORD können Formeln in **HPFX** eingefügt werden.
Bis zu 44 Zeichen können in das ALPHA-Register kopiert werden. Längere Strings können in das X-Register kopiert werden, dürfen aber nicht mit einem Vorzeichen, oder einer Zahl beginnen. Abhilfe schafft zum Beispiel das Einfügen eines „=" an den Anfang des Ursprungstext. Das Gleichheitszeichen „=" wird durch **HPFX** eliminiert.
Ist die einzugebende Funktion eine gewöhnliche Differentialgleichung, kann mit gDGL in das Programm **HPDGL** gewechselt werden.

HPFX: globale Parameter





Globale Parameter

#IT Anzahl der Iterationen

Xdiff $\leq |x_i - x_{i-1}|$ dann x_i akzept.

Ydiff $\leq |Y_i|$ dann x_i akzeptieren

PRTO nur Ergebnisse drucken

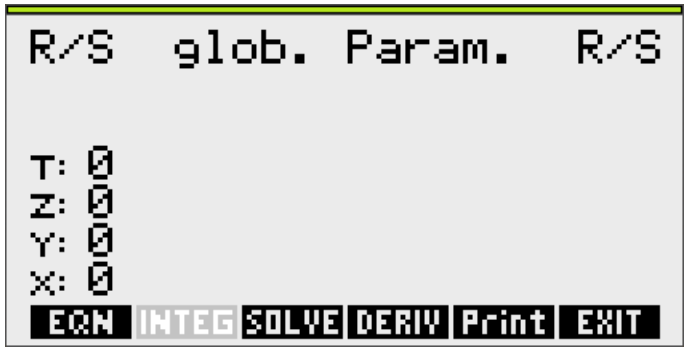
PRT- keine Druckausgabe

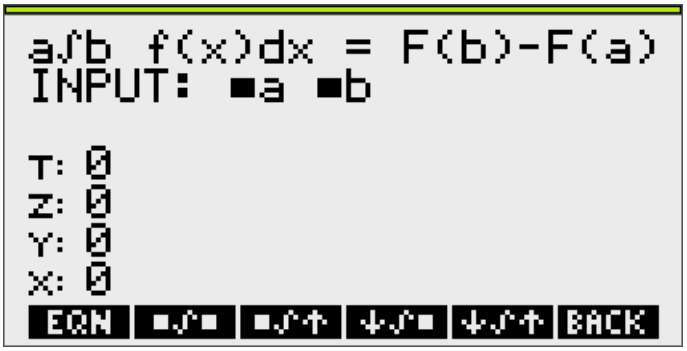
PRT+ drucke jeden Iterationsschritt

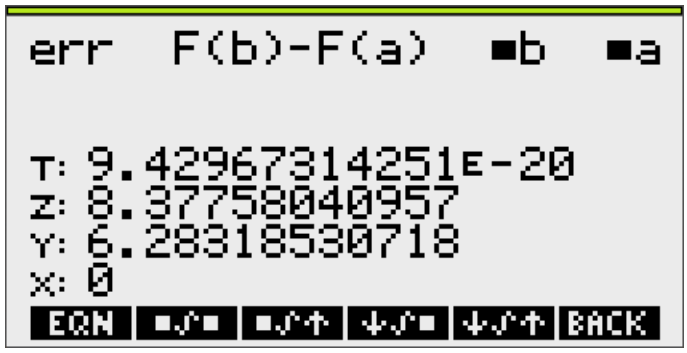
h=E-4 Abstand h in $x \pm h$ zur Berechnung der Ableitungen

HPFX: Integration INTEG

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-cos\,(x)+0{,}25} = \frac{2\pi}{0{,}75}$$ (RAD-Modus)







errechnetes Ergebnis:

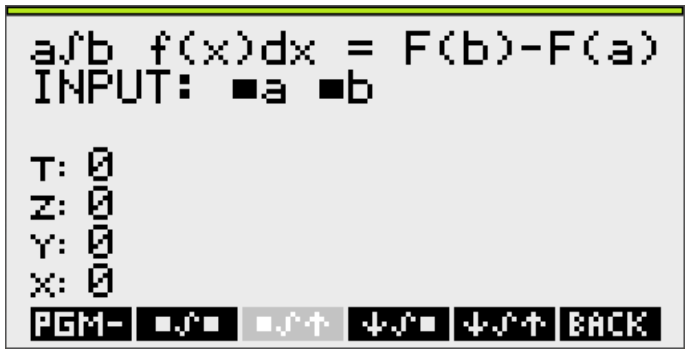
8,3775804095727819692337156887453442

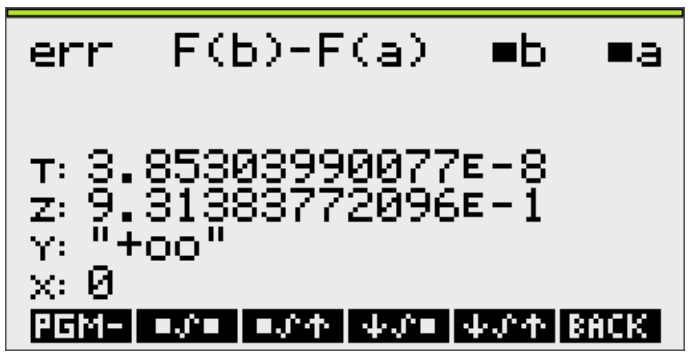
tatsächliches Ergebnis:

8,3775804095727819692337156887453441

HPFX: Integration INTEG

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{0,8}dx = \Gamma(1,8) \approx 0,9314$$





errechnetes Ergebnis:

0,9313837720957645466309412467773764

tatsächliches Ergebnis:

0,9313837709802426989090567506147671

HPFX: Nullstellenverfahren: $f(x) = x^{2,5} - 2\sqrt{x}$

SOLVE

```
R/S  glob. Param.  R/S

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
 EQN INTEG SOLVE DERIV Print EXIT
```

```
EQN or ext. PRGM?

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
 EQN        gDGL      PRGM
```

$$f(x) = x^{2,5} - 2\sqrt{x}$$

```
Use SKIN: HP-41EQN or:
Write Equation direct



(X)^(2.5)-2*√(X)
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
```

R/S

```
R/S  glob. Param.  R/S

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
 EQN INTEG SOLVE DERIV Print EXIT
```

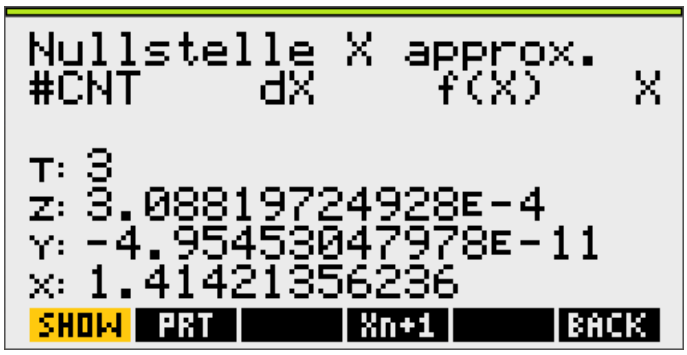
```
1+2+3 Punkt-Verfahren

T: "|"
Z: "X2"
Y: "X1"
X: "Xo"
 EQN Auto      PARA XEQ BACK
```

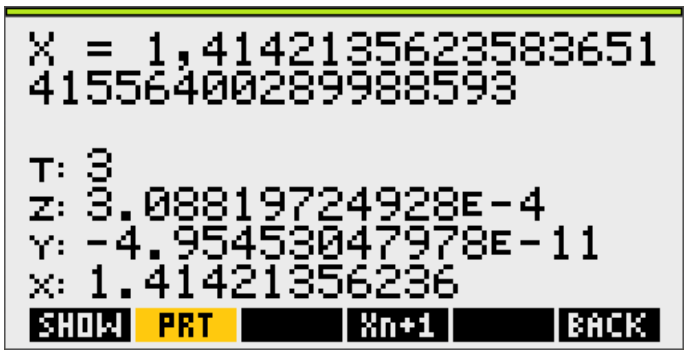
```
_  #IT |Ydiff| |Xdiff|

T: "Auto"
Z: 99
Y: 0.00000000001
X: 0.00000000001
 #IT Xdiff Ydiff PRTO h=E-4 BACK
```

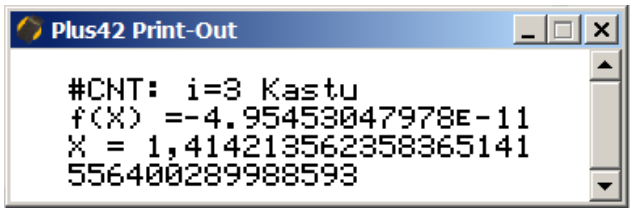
Die Parameter:

- **#IT** Anzahl der Iterationen
- **Xdiff** $\leq |x_i - x_{i-1}|$ dann x_i akzept
- **Ydiff** $\leq |Y_i|$ dann x_i akzeptieren
- **PRTO** nur Ergebnisse drucken
- **PRT-** keine Druckausgabe
- **PRT+** drucke jeden Iterationsschritt
- **h=E-4** Abstand h in $x \pm h$ zur Berechnung der Ableitungen

```
Y:
X:
 #IT Xdiff Ydiff PRT+ h=E-4 BACK
```







Auswahl der/des Verfahren(s)

Auto automatische Verfahrenswahl

1-Punkt-Verfahren:

Kost Kasturiarachi

Ostr Ostrowski

2- Punkte-Verfahren:

KShM Kanwar Sharma Mamta

RegFa Regula Falsi Varianten

- **minYI** Minimum der $|Y_i|$
- **Sekan** Sekantenverfahren
- **Illino** Illinois
- **Pegas** Pegasus
- **And.B** Andersen-Björck
- **Dekke** Dekker
- **Ridde** Ridders

3-Punkte-Verfahren

invQI inverse quad. Interpolation

Shar Sharma-Familie

- **minYI** Minimum der $|Y_i|$
- **Kreis** Kreisinterpolation
- **Parab** parabolische Interp.
- **MuLLr** Muller-Verfahren
- **Ellip** elliptische Interp.
- **HypbL** hyperbolische Interp
- **extrn** externes Verfahren

Druckparameter: $f(x) = x^{2,5} - 2\sqrt{x}$

```
R/S  glob. Param.  R/S

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
EQN INTEG SOLVE DERIV Print EXIT
```

```
3 Punkt-Verfahren

T: "|"
Z: "X2"
Y: "X1"
X: "Xo"
EQN Shor minIVl PARA XEQ BACK
```

```
_  #IT |Ydiff| |Xdiff|

T: "Sharma"  PRT-
Z: 99        PRTO
Y: 0.0000000001
X: 0.0000000001
#IT Xdiff Ydiff PRT+ h=E-4 BACK
```

```
{ HOME }

T: "|"
Z: "|"
Y: "Xo"
X: 5_
EQN Kost      PARA XEQ BACK
```

```
Nullstelle X approx.
#CNT     dX      f(X)     X

T: 5
Z: 3.84755248196E-10
Y: 9.5791E-29
X: 1.41421356237
SHOW PRT      Xn+1      BACK
```

PRT- Nichts drucken

PRTO Nur Ergebnisse drucken

Plus42 Print-Out

```
=========================

VERF.: Kastu
Y(X) = X^(2.5)-2*√(X)
Y_2 =                    ""
Y_1 =                    ""
Y_0 =       51.4295634825
X_2 =                    ""
X_1 =                    ""
X_0 =                     5

#CNT: i=5 Kastu
f(X) =          9.5791E-29
X =          1.41421356237
```

PRT+ Jeden Schritt drucken

Plus42 Print-Out

```
=========================

VERF.: Kastu
Y(X) = X^(2.5)-2*√(X)
Y_2 =                    ""
Y_1 =                    ""
Y_0 =       51.4295634825
X_2 =                    ""
X_1 =                    ""
X_0 =                     5

#CNT: i=0 Kastu
Yi =        51.4295634825
Xi =                    5

#CNT: i=1 Kastu
Yi =        6.21795450532
Xi =        2.44474403131

#CNT: i=2 Kastu
Yi =        0.48606302734
Xi =        1.54624977983

#CNT: i=3 Kastu
Yi =    3.08509797552E-3
Xi =        1.41513017335

#CNT: i=4 Kastu
Yi =    1.29415723618E-9
Xi =        1.41421356276

#CNT: i=5 Kastu
f(X) =          9.5791E-29
X =          1.41421356237
```

Nullstellen: externe mehrstufige Verfahren

SOLVE

Externes Verfahren: Jain

$$g(x_0) = f\big(x_0 + f(x_0)\big) - f(x_0)$$

$$x_0^* = x_0 - \frac{f^2(x_0)}{g(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f^3(x_0)}{[g(x_0)]\,[f(x_0) - f(x_0^*)]}$$

PRP “JAIN“

Plus42 Print-Out

```
                PRP "JAIN"

  00 { 107-Byte Prgm }

  01▶LBL "JAIN"
RCL "XF"  RCL "F0"  +
"Xext1"  XEQ "HPFX"
RCL "XF"  RCL "F0"  X↑2
RCL "Yext1"  RCL "F0"  -
÷  -  "Xext2"
XEQ "HPFX"  RCL "Yext1"
RCL "F0"  -  RCL "F0"
RCL "Yext2"  -  ×  1/X
RCL "F0"  3  Y↑X  ×
RCL "XF"  X<>Y  -  SF 25
RTN  .END.
```

Programmvariablen:

$XF = x_0$
$F0 = f(x_0)$
$Xext1 = x_0 + f(x_0)$
$Yext1 = f\big(x_0 + f(x_0)\big)$
$Xext2 = x_0^*$
$Yext2 = f(x_0^*)$

Argumente, Funktionswerte:

ALPHA = "$\mathbf{Xext}\{m\}$" $m = 0:9$
nach XEQ “HPFX”: "$\mathbf{Yext}\{m\}$"

```
{ HOME }


T: "X2"
Z: "X1"
Y: "Xo"
X: 2_
EQN extrn      PARA XEQ BACK
```

```
externer PRGM-Name ?

JAIN_
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
```

R/S

```
Nullstelle X approx.
#CNT     dX      f(X)     X

T: 4
Z: -1.20486278869E-8
Y: 1.2835971971E-23
X: 1.41421356237
SHOW PRT      Xn+1      BACK
```

Plus42 Print-Out

```
#METHOD=          "extrn"

#CNT: i=4 JAIN
f(X) =  1.2835971971E-23
X =       1.41421356237
```

Jain; Steffensen type methods for solving non-linear equations; App. Math. and Comp. 194 (2007) 527–533

Startwerte: $x_i \in \mathbb{R}, oder\ \mathbb{C}$

- **Ohne Startwert wird $x_0 = 1$ gesetzt.**
- **Ist x_1 nicht initialisiert, wird $x_1 = x_0 + 1$ gesetzt.**
- **Sind x_1 und x_2 nicht initialisiert,**
- **wird $x_1 = x_0 + 1$ und $x_2 = x_1 + 1$ gesetzt.**
- **Ist nur x_2 nicht initialisiert, wird $x_2 = 0,5(x_0 + x_1)$ gesetzt.**
- **Nach der Berechnung der Funktionswerte werden vor Iterationsbeginn die Startwerte den Beträgen ihrer Funktionswerte nach geordnet.**

Parameter drucken

```
_  #IT |Ydiff| |Xdiff|

T: "Kastu"
Z: 99
Y: 0.00000000001
X: 0.00000000001
#IT Xdiff Ydiff PRT+ h=E-4 BACK
```

Plus42 Print-Out

```
------------------------
Verfahren: Kastu
Iterationen: IT = 99
|dX| = 0.0000000001
|dY| = 0.0000000001
Drucken: PRT+
 Jeden Schritt drucken
------------------------
```

einfache Nachiteration

```
Nullstelle:    f(X) ~ 0
#CNT     dX    f(X)   X

T: 3
Z: 3.08819724928E-4
Y: -4.95453047978E-11
X: 1.41421356236
SHOW PRT      Xn+1      BACK
```

n-fache Nachiterationen

```
Nullstelle:    f(X) ~ 0
#CNT     dX    f(X)   X

T: 3.08819724928E-4
Z: -4.95453047978E-11
Y: 1.41421356236
X: Wert > 0 ganzzahlig
SHOW PRT      Xn+1      BACK
```

HPFX: Graphiken

TABLE PLOT PHASE

$$f(x) = \frac{1}{1 - cos(x) + 0,25}$$

```
R/S  glob. Param.  R/S

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
EQN INTEG SOLVE DERIV Print EXIT
```

```
EQN: f(X) = 1/(1-COS(X
)+0.25)

T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
EQN ←Prt TABLE CopyX PLOT BACK
```

Plus42 Print-Out

```
f(X) = 1/(1-COS(X)+0.25)
```

```
EQN: f(X) = 1/(1-COS(X
)+0.25)

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
EQN ←Prt TABLE CopyX PLOT BACK
```

Xinc Schrittweite

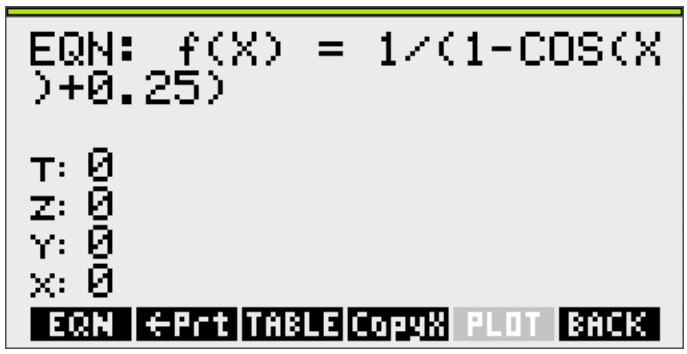
Xinc Anzahl der Schritte

```
___  Xinc  Xmax  Xmin

T: 0
Z: 5.38461538462E-1
Y: 6.5
X: -0.5
EQN Xmin Xmax Xinc XEQ BACK
```

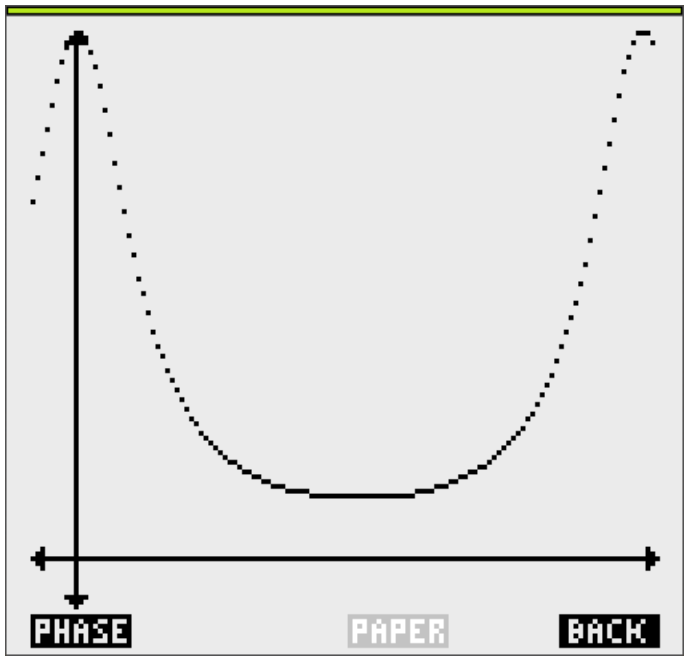
Plus42 Print-Out

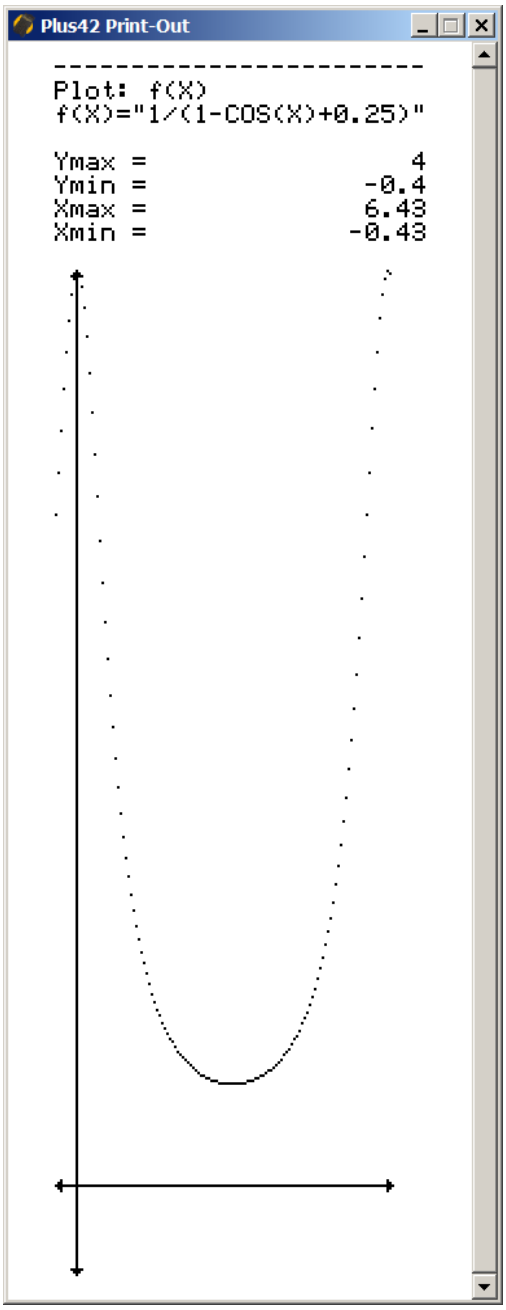
```
------------------------
Tabelle: f(X)
f(X)="1/(1-COS(X)+0.25)"

X              f(X)     ***

-0.5
     2.68515890415      ***
3.84615384615E-2
     3.98820204017      ***
5.76923076923E-1
      2.4280384942      ***
1.11538461538
     1.23431204947      ***
1.65384615385
 7.50213215995E-1       ***
2.19230769231
 5.45772711806E-1       ***
2.73076923077
 4.61511703533E-1       ***
3.26923076923
 4.46057127596E-1       ***
3.80769230769
     0.49110178619      ***
4.34615384615
 6.21850795937E-1       ***
4.88461538462
 9.27107333686E-1       ***
5.42307692308
     1.67323502395      ***
5.96153846154
     3.31912844315      ***
6.5
     3.65747893695      ***
```

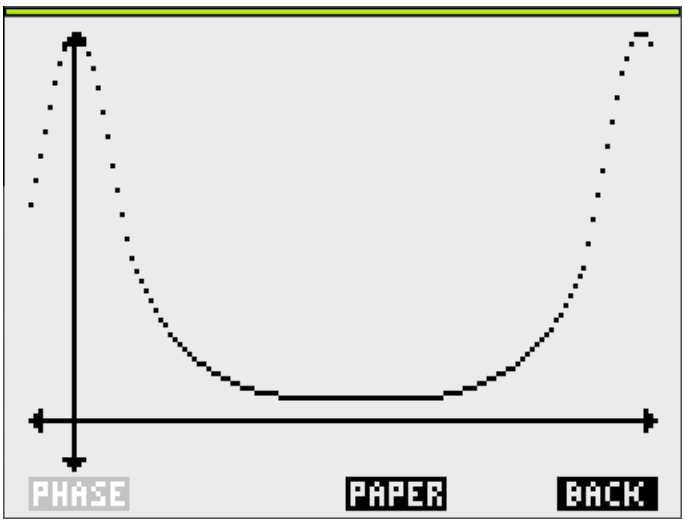
TAB Xinc Xmax Xmin
T: [14x2 Matrix]
Z: 5.38461538462E-1
Y: 6.5
X: -0.5
EQN Xmin Xmax Xinc XEQ BACK


EQN: f(X) = 1/(1-COS(X
)+0.25)
T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
EQN ←Prt TABLE CopyX PLOT BACK

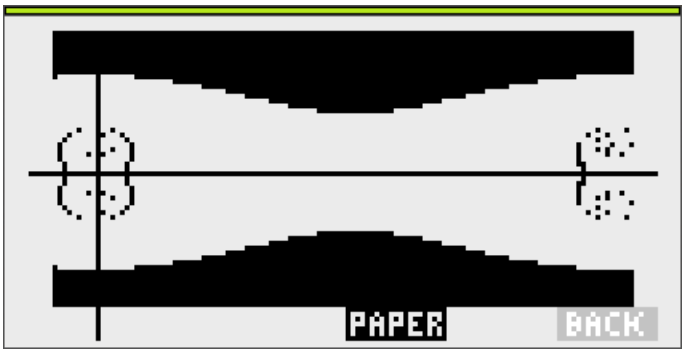
Ymax Ymin Xmax Xmin
T: 4
Z: -0.4
Y: 6.5
X: -0.5
Xmin Xmax Ymin Ymax XEQ BACK

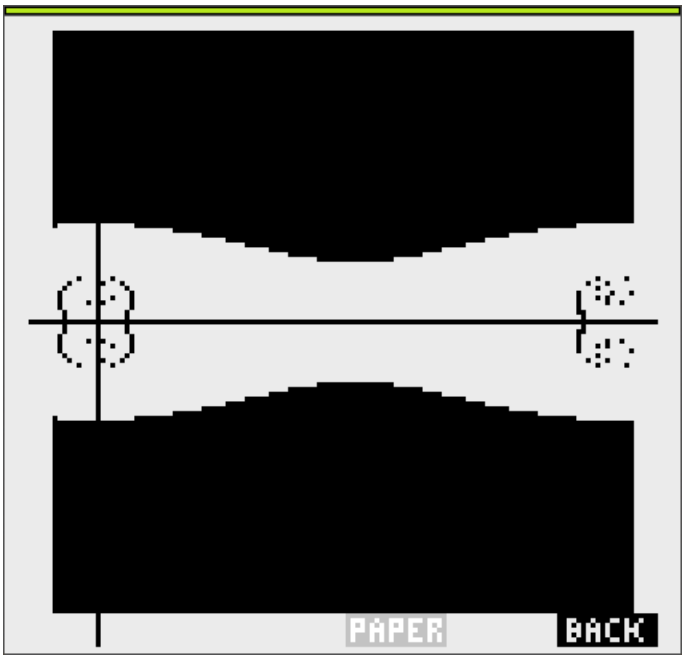

PHASE
PAPER
BACK


Plus42 Print-Out
Plot: f(X)
f(X)="1/(1-COS(X)+0.25)"
Ymax = 4
Ymin = -0.4
Xmax = 6.43
Xmin = -0.43


PHASE
PAPER
BACK

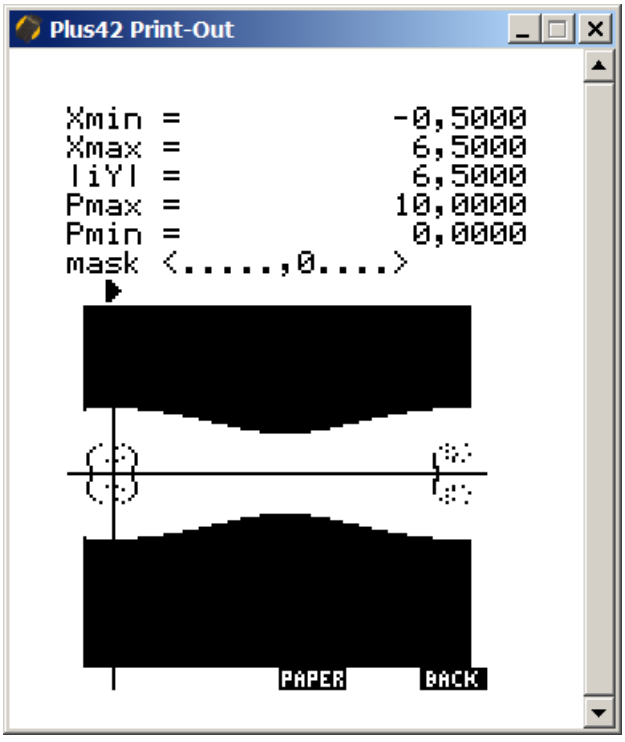
....,0... iY Pmax Pmin
T: 0.1
Z: 6.5
Y: 10
X: 0
Pmin Pmax |iY| <0.0> XEQ BACK

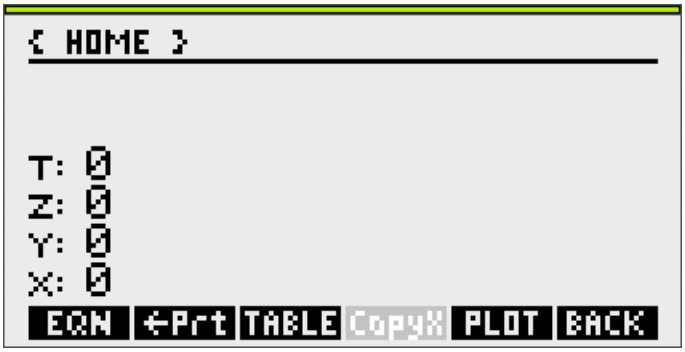

PAPER
BACK


PAPER
BACK

....,0... iY Pmax Pmin
T: 0.1
Z: 6.5
Y: 10
X: 0
Pmin Pmax |iY| <0.0> XEQ BACK

Ymax Ymin Xmax Xmin
T: 4
Z: -0.4
Y: 6.5
X: -0.5
Xmin Xmax Ymin Ymax XEQ BACK


Plus42 Print-Out
Xmin = -0,5000
Xmax = 6,5000
|iY| = 6,5000
Pmax = 10,0000
Pmin = 0,0000
mask <.....,0....>
PAPER
BACK

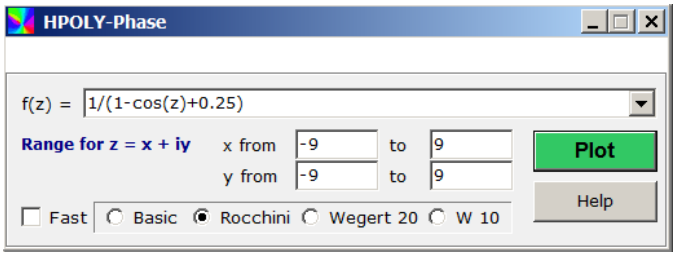

{ HOME }
T: 0
Z: 0
Y: 0
X: 0
EQN ←Prt TABLE CopyX PLOT BACK

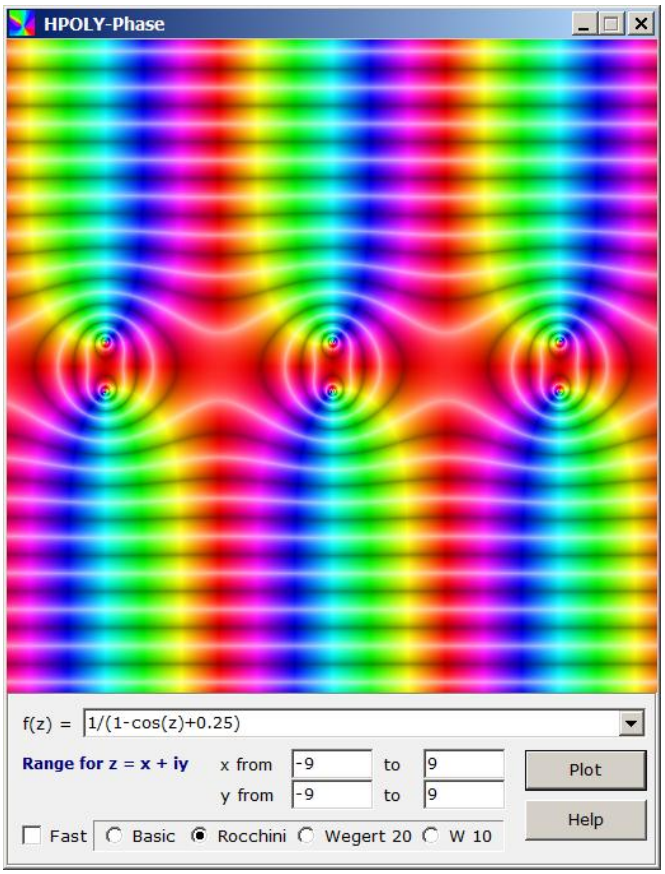
Copy & Paste to Phase:
Xmin Xmax +/-iY f(Z)
T: -0.5
Z: 6.5
Y: 3.5
X: "1/(1-COS(Z)+0.25)"
f(X) f(Z) BACK

STRG ”C“

WINDOWS: ”phase.exe“

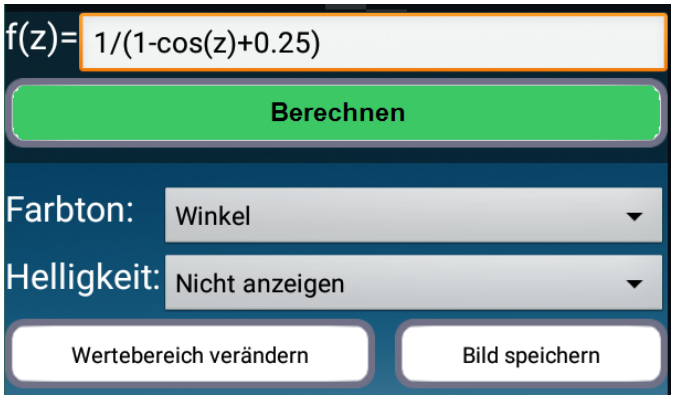
STRG “V“

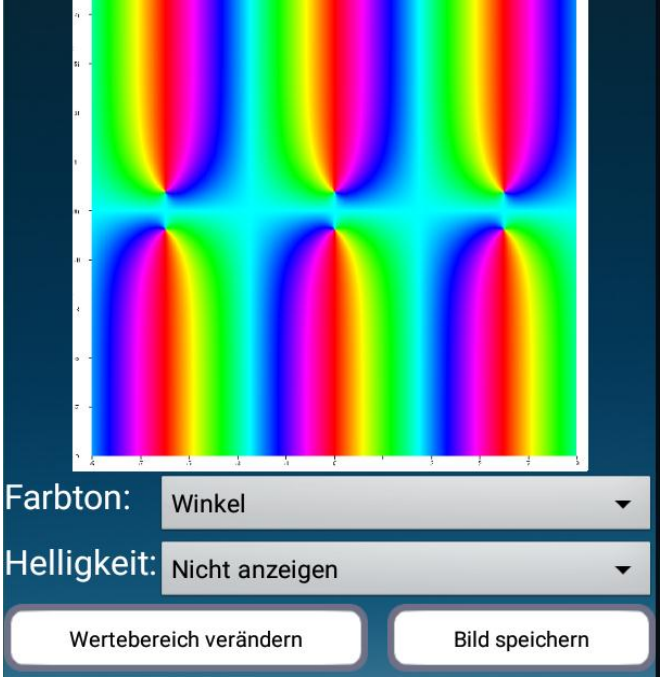


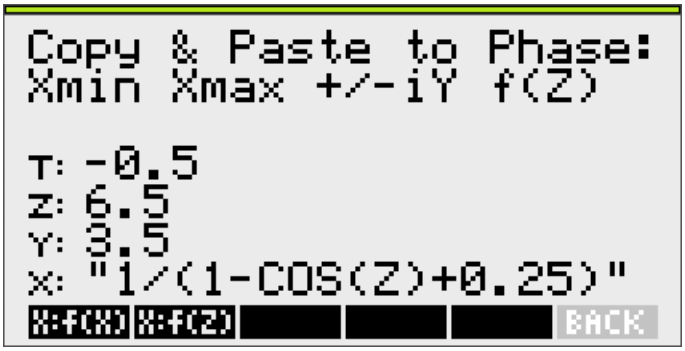


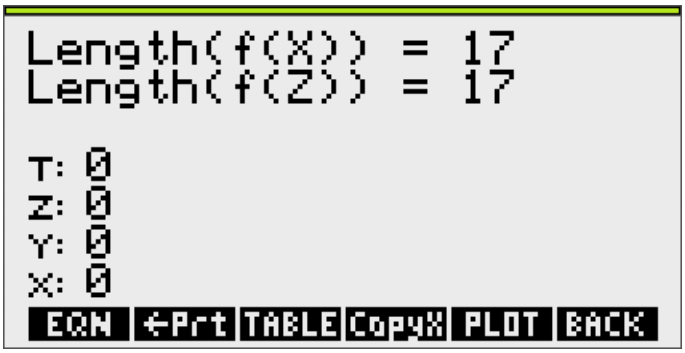
ANDROID:

“Komplexe Funktionen“



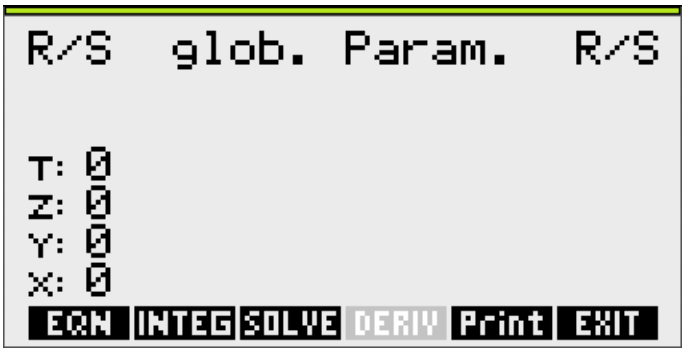




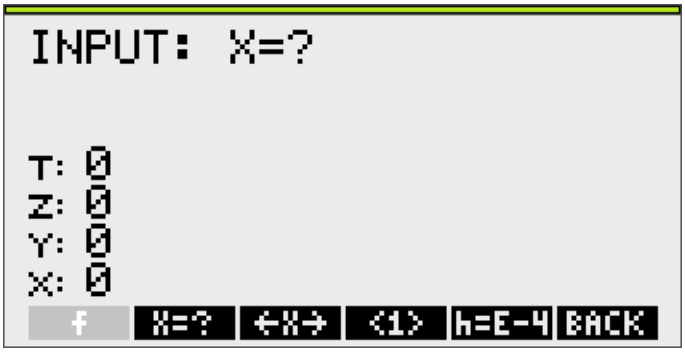


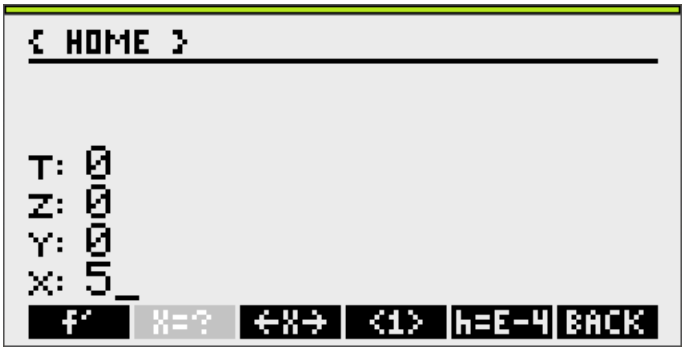
HPFX: Ableitungen DERIV

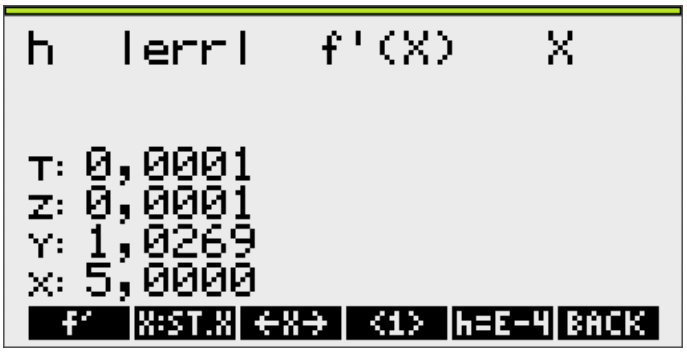
$$\left(\frac{1}{1-cos(x)+0{,}25}\right)' = -\frac{sin(x)}{\left(\frac{5}{4}-cos(x)\right)^2}$$

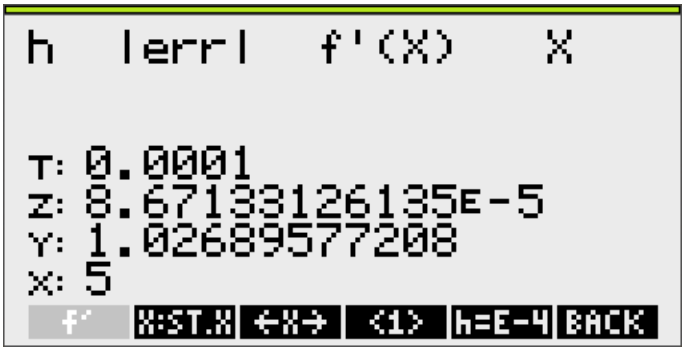


Ist ein Funktionswert X=? für X eingegeben, dann erscheint X:ST.X im Menu. Steht X:ST.X im Menu, führt jede Parameteränderung zu einer Neuberechnung der zuvor gewählten Ableitung.









errechnetes Ergebnis:

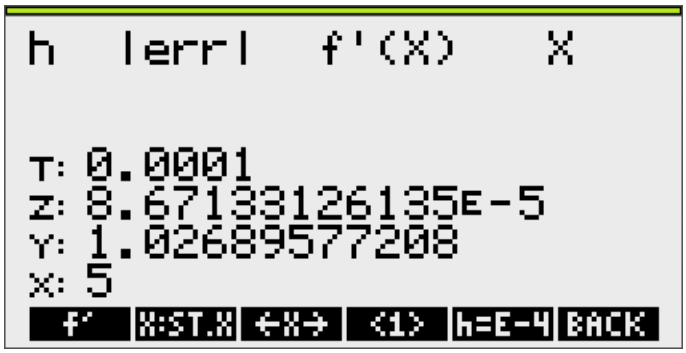
1,026895772076037648 42…

tatsächliches Ergebnis:

1,026895766689916869 82…

HPFX: Ableitungen DERIV

Die Parameter



f	<1>	<8>	Berechnung des Funktionswertes.
f'	<1>	<8>	Berechnung der 1. Ableitung.
f''	<2>	<8>	Berechnung der 2. Ableitung.
f'''	<3>	<8>	Berechnung der 3. Ableitung.
f(4)	<4>	<8>	Berechnung der 4. Ableitung.
f(5)	<5>	<8>	Berechnung der 5. Ableitung.
f(6)	<6>	<8>	Berechnung der 6. Ableitung.
f(7)	<7>	<8>	Berechnung der 7. Ableitung.
f(8)	<8>	<8>	Berechnung der 8. Ableitung

←X→ Mittelwert von rechts- und linksseitiger Ableitung **...**

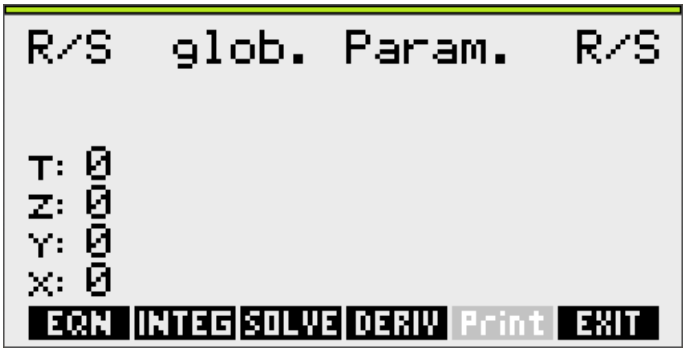
X→ Rechtsseitige Ableitung **...**

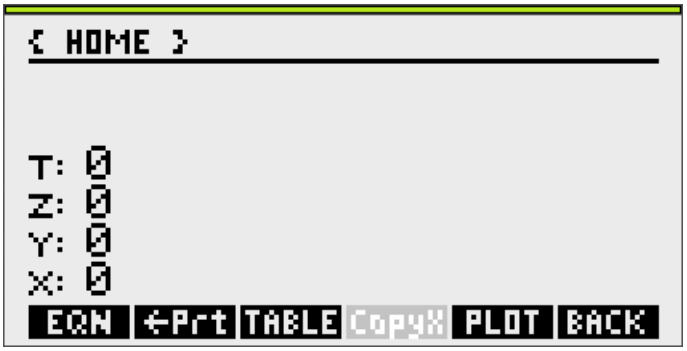
←X Linksseitige Ableitung **...**

... an <m> Stützstellen mit den äquidistanten Abständen h=E-4**.**

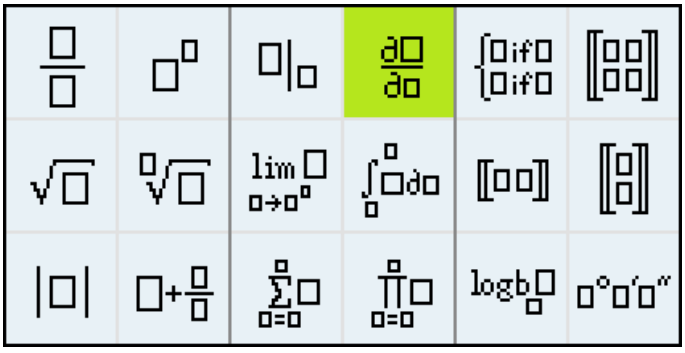
HP-PRIME: Symbolische Ableitungen

$$\left(\frac{1}{1-cos(x)+0,25}\right)' = -\frac{sin(x)}{(-cos(x)+0,25+1)^2}$$





STRG “C“

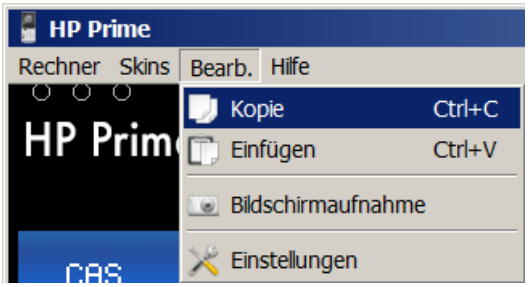


$$\frac{\partial \blacksquare}{\partial \blacksquare}$$ **STRG “V“**

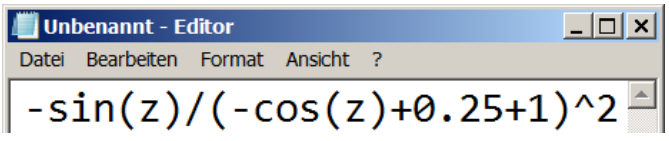
$$\frac{\partial \frac{1}{1-\cos(z)+0.25}}{\partial z}$$

Enter ≈

$$-\frac{SIN(z)}{(-COS(z)+0.25+1)^2}$$

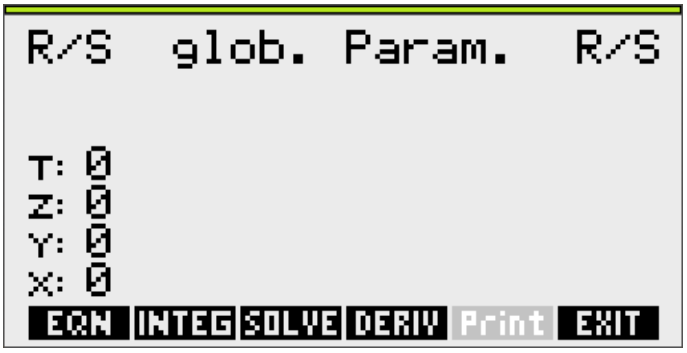


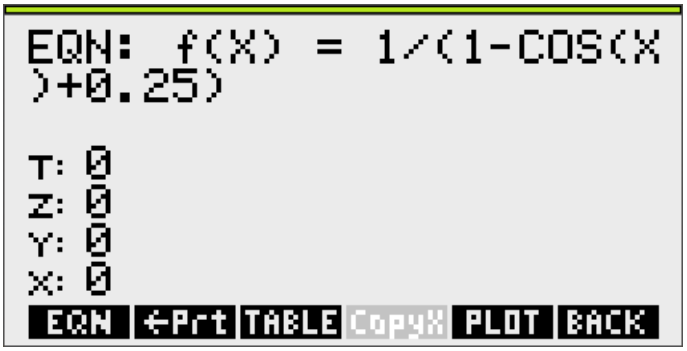
STRG „V“



Microsoft Mathematics: Symbolische Ableitungen

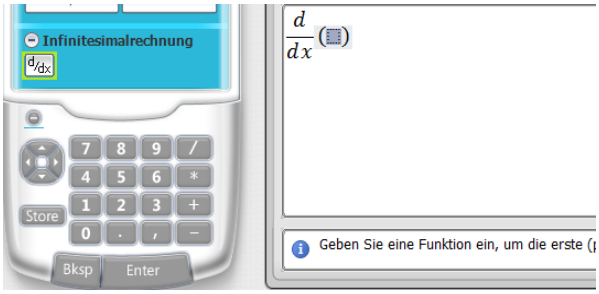
$$\left(\frac{1}{1-cos(x)+0,25}\right)' = -\frac{sin(x)}{(-cos(x)+1,25)^2}$$



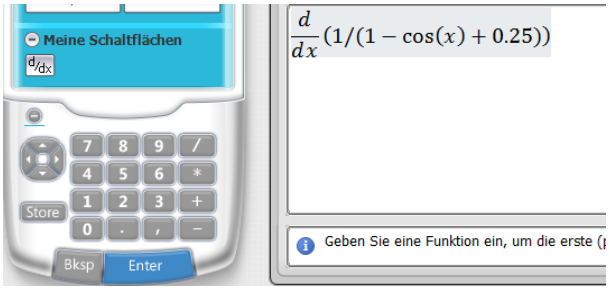


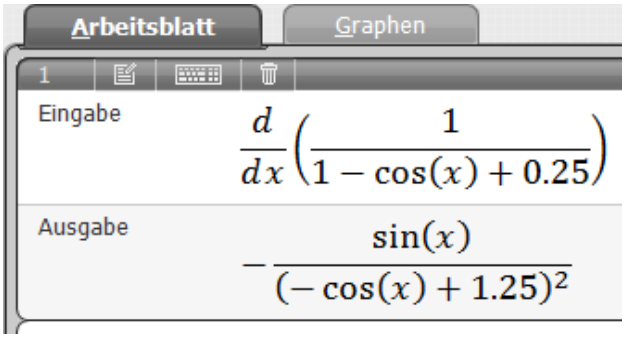
STRG "C"

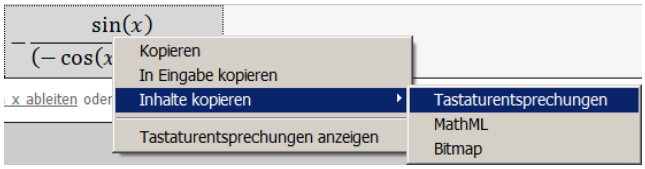
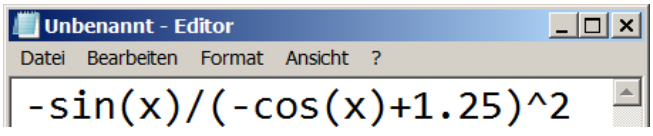
Microsoft Mathematics



STRG "V"







STRG "V"