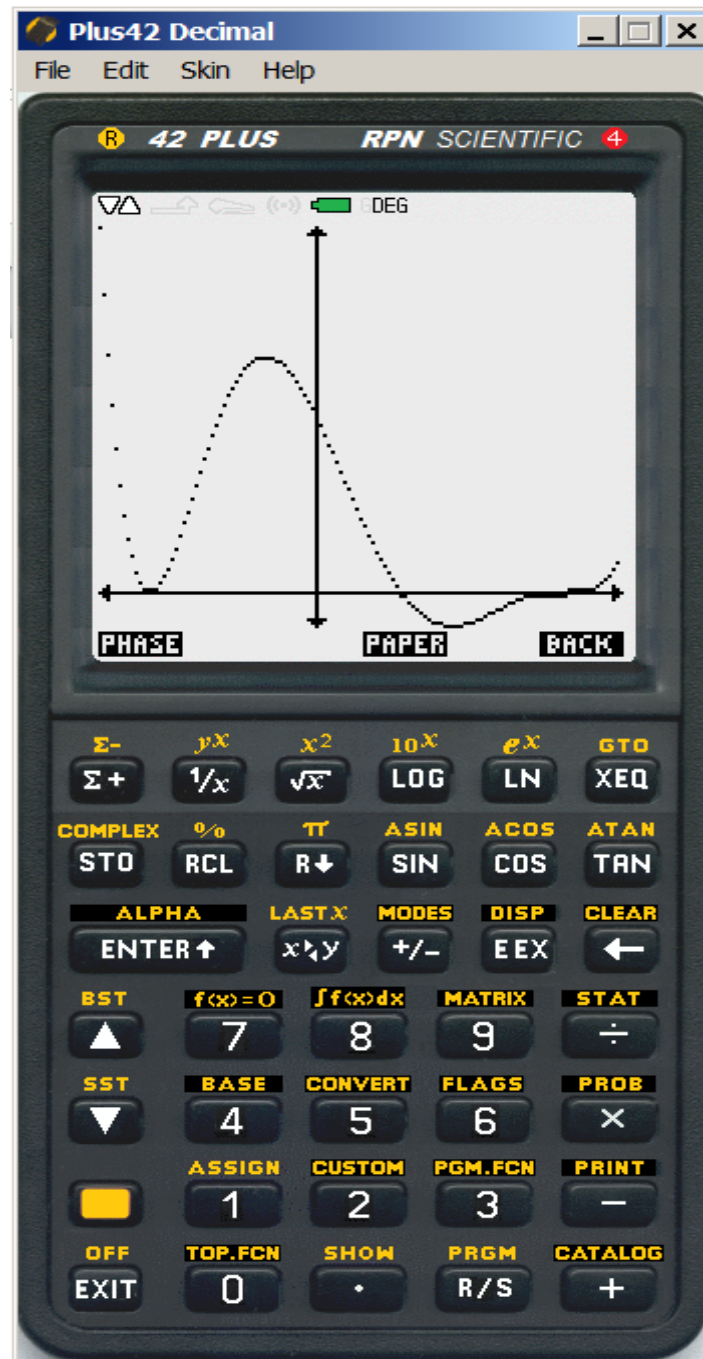


HPOLY

Nullstellen – Ableitungen – Integrale – Tabellen und Graphiken für reelle Polynome



Eine bebilderte Dokumentation
für den PLUS42

(Version 1, Februar 2024)

INHALTSVERZEICHNIS

- 1 Die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades**
 - Die Gleichung 2. Grades: $ax^2 + bx + c = 0$
 - Die Gleichung 3. Grades: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
 - Die kubischen Resolventen
 - Die Gleichung 4. Grades: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$
- 2 Das Lin-Bairstow-Verfahren**
- 3 Schätzung der Vielfachheit m einer Nullstelle**
- 4 Die parameterabhängige Verfahrensfamilie**
 - Herleitung der Verfahrensfamilie
 - Eigenschaften des Laguerre-Verfahrens
- 5 Weitere Nullstellenverfahren mit zweiter Ableitung**
 - Das Halley-Verfahren
 - Das BSC-Verfahren von Basto Semiao Calheiros
 - Das Chebyshev-Verfahren
 - Das Ostrowski Verfahren
 - Das Stoer-Bulirsch-Verfahren
- 6 Nullstellenverfahren mit dritter Ableitung**
 - Das Skowron-Verfahren
 - Das erweiterte BSC-Petkovic-Verfahren
 - Das Kœnig-Verfahren

7 Integration gebrochen rationaler Funktionen

- Die Quadraturformeln aus dem HP-65 MATH PAC2
- Tabelle: Gauß49-Kronrod99-Quadraturformel

8 Plotten: Das “interessante“ Intervall

9 Bebilderte Kurzanleitung der HPOLY-Funktionen

- Initialisierung HPREG-Matrix
- Formeln und Funktionen des Programms HPOLY
- Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades
- Koeffizienten zweiten Grades berechnen
- Koeffizienten dritten Grades berechnen
- Koeffizienten vierten Grades berechnen
- Eingabe Polynomkoeffizienten aus Excel `<n:o> <o:n>`
- Eingabe Polynomnullstellen aus Excel `P =PXi Xi:Xn`
- Eingabe der Polynomkoeffizienten `Xi`
- Eingabe der Nullstellen des Polynoms `Xi`
- Menu für Integration und Ableitungen `JP P' P''`
- Polynomoperationen: `P<>Q P:P*Q P:P+Q P:P-Q`
Tausch – Multiplikation – Addition – Subtraktion
- Graphiken: `Print TABLE PLOT`
- Nullstellen: `SOLVE`
Verfahrensfamilien und Verfahrensparameter `PARA`
Lin-Bairstow Verfahren `LIN BAIR`
Externe ein- und mehrstufige Verfahren `extrn`

1 Die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades

Algebraische Gleichungen bis zum vierten Grad sind durch deren Koeffizienten unter Verwendung der vier Grundrechenarten, dem Radizieren (daher auch die Formulierung: durch Radikale) und der Trigonometrie lösbar.

Die Gleichung 2. Grades: $ax^2 + bx + c = 0$

Die allgemeine Lösungsformel für die quadratische Gleichung ist:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es existiert für $b \neq 0$ eine numerisch günstigere Darstellung der beiden Lösungen:

Für $b > 0$:

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für $b < 0$:

$$x_1 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Gleichung 3. Grades: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Die allgemeine Gleichung wird mit der Substitution:

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

auf die reduzierte Form:

$$z^3 + 3Qz - 2R = 0 \text{ mit}$$

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9a(bc - 3ad) - 2b^3}{54a^3}$$

gebracht.

Das Vorzeichen der Diskriminante: $\Delta = Q^3 + R^2$
entscheidet über die Lösungsformel zur Berechnung von x_1 .

$$x_1 = \begin{cases} -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{\Delta}} & ; \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{3a} + 2\sqrt{|Q|} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{|Q|^3}}\right)\right) & ; \Delta < 0 \end{cases}$$

(Die Berechnung von $\sqrt[3]{x}$ erfolgt als: $\text{sign}(x)\sqrt[3]{|x|}$ und die Winkelfunktion wird im 360°-Modus berechnet.)

Mit der Lösung x_1 wird die Gleichung 3. Grades in das Produkt einer linearen und einer quadratischen Gleichung zerlegt. Es ist:

$$(x - x_1)(a_3 x^2 + Bx + C) = 0 \text{ mit}$$

$$B = (a_2 + a_3 x_1) \quad \text{und} \quad C = a_1 + Bx_1.$$

Die quadratische Gleichung wird dann wie oben gelöst.

Die kubischen Resolventen

Um die quartische Gleichung zu lösen, muss eine der kubischen Resolventen gelöst werden. Ausgehend von der Normalform der Gleichung 4. Grades:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

gibt es fünf Resolventen. Es sind die von:

- Christianson-Brown

$$y^3 + \frac{4a^2b - 4b^2 - 4ac + 16d - \frac{3}{4}a^4}{a^3 - 4ab + 8c}y^2 + \left(\frac{3}{16}a^2 - \frac{b}{2}\right)y + \frac{1}{64}(a^3 + 4ab - 8c)$$

- Descartes-Euler-Cardano

$$y^3 + \left(2b - \frac{3}{4}a^2\right)y^2 + \left(\frac{3}{16}a^4 - a^2b + ac + b^2 - 4d\right)y - \frac{1}{64}(a^3 + 4ab - 8c)^2$$

- Ferrari-Lagrange

$$y^3 + by^2 + (ac - 4d)y + a^2d + c^2 - 4bd$$

- Neumark

$$y^3 - 2by^2 + (ac + b^2 - 4d)y + a^2d - abc + c^2$$

- Yacoub-Fraidenraich-Brown

$$(a^3 - 4ab + 8c)y^3 + (a^2b - 4b^2 + 2ac + 16d)y^2 + (a^2c - 4bc + 8ad)y + a^2d - c^2$$

Die Gleichung 4. Grades: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Für die Taschenrechner HP-65, HP-67 und den HP-41C löste HP die quartische Gleichung in den jeweiligen MATH-PACs. Mit der dort verwendeten Technik wird auch in diesem Programmpaket die Gleichung 4. Grades gelöst.

Durch die Substitution:

$$x = y - \frac{b}{4a}$$

erhält man die reduzierte Form:

$$y^4 + Py^2 + Qy + R = 0 \text{ mit}$$

$$P = \frac{-c}{a}$$

$$Q = \frac{bd - 4ae}{a^2}$$

$$R = \frac{e\left(4c - \frac{b^2}{a}\right) - d^2}{a^2}$$

Mit den Werten:

$$S = 2P^3 - 9(PQ - 3R) \text{ und}$$

$$T = 3Q - P^2$$

wird die Diskriminante

$$\Delta = S^2 + 4T^3$$

bestimmt.

In Abhängigkeit des Vorzeichens von Δ berechnet sich die Lösung

$$y_1 = \begin{cases} \frac{-1}{3} \left(P + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(S + \sqrt{\Delta})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(S - \sqrt{\Delta})} \right) & ; \Delta \geq 0 \\ \frac{-1}{3} \left(P + 2 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \sqrt{S^2 + |\Delta|}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{S}{\sqrt{S^2 + |\Delta|}} \right) \right) \right) & ; \Delta < 0 \end{cases}$$

(Die Berechnung von $\sqrt[3]{x}$ erfolgt als: **sign**(x) $\sqrt[3]{|x|}$ und die Winkelfunktion wird im 360°-Modus berechnet.)

Nun wird die reduzierte Gleichung dritten Grades aufgespalten in:

$$(y - y_1)(y^2 + [P + y_1]y + Q + y_1[P + y_1]) = 0$$

und die Lösungen für y_2 und y_3 wie oben ermittelt.

Durch $y_0 = \begin{cases} y_1 & ; y_{2,3} \notin \mathbb{R} \\ \max(y_1; y_2; y_3) & ; y_{2,3} \in \mathbb{R} \end{cases}$ wird die ursprüngliche

Gleichung 4. Grades in zwei quadratische Gleichungen zerlegt.

$$a(x^2 + [A + C]x + [B + D])(x^2 + [A - C]x + [B - D]) = 0 \text{ mit}$$

$$A = \frac{b}{2a};$$

$$B = \frac{y_0}{2};$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 - \frac{e}{a}};$$

$$C = \begin{cases} \frac{\frac{by_0}{4a} - \frac{d}{2e}}{D} \\ \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} + y_0 \end{cases}.$$

Die quadratischen Gleichungen werden wie oben gelöst.

2 Das Lin-Bairstow-Verfahren

Die hier vorgestellten Verfahren sind entweder nur für Polynome, oder wegen der Berücksichtigung der Ableitungen insbesondere für die Berechnung von Polynomfunktionen geeignet.

Das Lin-Bairstow-Verfahren spaltet einen quadratischen Faktor $x^2 + px + q$ durch das doppelzeilige Horner-Schema ab. Auch mit reellen Startwerten x_1 und x_2 , also $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 x_2$ können komplexe Nullstellen ermittelt werden, wobei die ganze Arithmetik stets im Reellen stattfindet.

$b_n = a_n$	$c_n = b_n$
$b_{n-1} = a_{n-1} - pb_n$	$c_{n-1} = b_{n-1} - pc_n$
$b_i = a_i - pb_{i+1} - qb_{i+2} ; i=0, \dots, n-2$	$c_i = b_i - pc_{i+1} - qc_{i+2} ; i=0, \dots, n-2$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
p	↓	$-pb_n$	$-pb_{n-1}$	...	$-pb_3$	$-pb_2$	$-pb_1$
q	↓		$-qb_n$	...	$-qb_4$	$-qb_3$	$-qb_2$
	$b_n ↗$	$b_{n-1} ↗$	$b_{n-2} ↗$	... ↗	$b_2 ↗$	$b_1 ↗$	$b_0 ↗$
p	↓	$-pc_n$	$-pc_{n-1}$	...	$-pc_3$	$-pc_2$	↓
q	↓		$-qc_n$	...	$-qc_4$	$-qc_3$	↓
	$c_n ↗$	$c_{n-1} ↗$	$c_{n-2} ↗$	... ↗	$c_2 ↗$	$c_1 ↗$	$c_0 ↗$

Als Korrekturschritt kann zwischen dem

- Lin-Schritt: $p = \frac{a_1 b_2 - a_0 b_3}{b_2^2} ; \quad q = \frac{a_0}{b_2}$

oder dem meist günstigeren

- Bairstow-Schritt: $p = p - \frac{b_0 c_3 - b_1 c_2}{c_2^2 - c_1 c_3} ; \quad q = q - \frac{b_1 c_1 - b_0 c_2}{c_2^2 - c_1 c_3}$

gewählt werden.

- Carrano: A Modified Bairstow Method for Multiple Zeros of a Polynomial, MATHEMATICS OF COMPUTATION, VOLUME 27, NUMBER 124, OCTOBER 1973
- McNamee: Numerical Methods for Roots of Polynomials (Part 1), 2007, Elsevier, Amsterdam
- McNamee: Numerical Methods for Roots of Polynomials (Part 2), 2013, Elsevier, Amsterdam

3 Schätzung der Vielfachheit m einer Nullstelle

In den meisten Verfahren findet die Vielfachheit m einer Nullstelle x_0 in ihrer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ Berücksichtigung. Deshalb wird zunächst eine Formel für die Schätzung der Vielfachheit m angegeben. Weil diese Schätzung auf den schon berechneten Funktionswerten und deren Ableitungen beruht, ist die Schätzung der Vielfachheit ohne Mehraufwand möglich. Die Konvergenz des jeweiligen Verfahrens wird jedoch erheblich beschleunigt.

Sei $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ein reelles Polynom n -ten Grades mit dem Höchstkoeffizienten $a_n \neq 0$. Weiterhin ist $n = \text{Grad}(P(x))$ und es bezeichnen: $P = P(x_0)$, $P' = P'(x_0)$ und $P'' = P''(x_0)$. Die Vielfachheit m einer Nullstelle in $U_\varepsilon(x_0)$ ist abschätzbar mit:

$$M = \begin{cases} \text{int} \left(\frac{P' P'}{P' P' - P P''} + 0.2 \right) \\ \text{int} \left(\frac{2(P' P' - P P'')^3}{[2P' P' P' - 3P P' P'' + P P P''']^2} + 0.2 \right) \end{cases}$$
$$m = \begin{cases} n; & \text{falls } M \geq n \\ 1; & \text{falls } M \leq 1 \\ M; & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Vielfachheitsfaktor m nach Vestermark

Wird die Vielfachheit m des Newton Verfahrens als Faktor $\frac{m+0}{1}$ betrachtet, ist die Vielfachheit auch auf Verfahren mit zweiten und dritten Ableitungen übertragbar. Für Verfahren mit k -ter Ableitung beträgt der Vielfachheitsfaktor $\frac{m+k-1}{k}$. Dadurch kann auch für jedes Verfahren mit dritten Ableitungen die Vielfachheit einer Nullstelle berücksichtigt werden.

- Hansen, Patrick: Estimating the Multiplicity of a Root; Numer. Math. 27, 1976, 121--131
- Ivanisov, Polishchuk: Finding polynomial roots: A fast algorithm convergent on the complex plane, Commun. Appl. Numer. Meth. 1, 1985, 287--291
- Vestermark: A Modified Newton and higher orders Iteration for multiple roots. (2023)

4 Die parameterabhängige Verfahrensfamilie

Es gibt mehrere Ansätze um das Laguerre-Verfahren zu begründen. Hier wird eine Technik verwendet, bei der gleich eine Familie von Verfahren unter Berücksichtigung der Vielfachheit hergeleitet wird.

Herleitung der Verfahrensfamilie

Sei $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ein reelles Polynom n -ten Grades. Es bezeichne stets: $P = P(x)$ den Funktionswert, sowie $P' = P'(x)$ die erste und $P'' = P''(x)$ die zweite Ableitung des Polynoms. Mit negativer logarithmischer Differentiation folgt:

$$A = \frac{P'}{P} = \frac{1}{(x-x_1)} + \frac{1}{(x-x_2)} + \dots + \frac{1}{(x-x_n)}$$
$$-A' = B = \frac{P'P' - PP''}{PP} = \frac{1}{(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{1}{(x-x_n)^2}$$

Für die m (ehr)-fache Nullstelle x_1 gilt dann

$$A = \frac{P'}{P} = \frac{m}{(x-x_1)} + \frac{1}{(x-x_{m+1})} + \dots + \frac{1}{(x-x_n)}$$
$$B = \frac{P'P' - PP''}{PP} = \frac{m}{(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x-x_{m+1})^2} + \dots + \frac{1}{(x-x_n)^2}$$

Die restlichen Nullstellen $x_{m+1}, \dots, x_n$ werden auf einen beliebigen, anderen Punkt, zum Bsp. das arithmetische Mittel der restlichen Nullstellen $X = \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n x_i$ mit der Vielfachheit μ "zusammen geschoben". Das führt zu den Gleichungen:

$$A = \frac{P'}{P} = \frac{m}{(x-x_1)} + \frac{\mu}{(x-X)}$$
$$B = \frac{P'P' - PP''}{PP} = \frac{m}{(x-x_1)^2} + \frac{\mu}{(x-X)^2}$$

Mit den Substitutionen

$$a = \frac{1}{(x-x_1)} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{(x-X)}$$

erhält man die Gleichungen

$$A = \frac{p'}{p} = ma + \mu b$$

$$B = \frac{p'p' - pp''}{pp} = ma^2 + \mu b^2$$

Durch Auflösen der ersten Gleichung nach b und Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt sich die quadratische Gleichung in a :

$$(m^2 + m\mu)a^2 - 2Ama + [A^2 - \mu B] = 0$$

Aus den Lösungen der quadratischen Gleichung

$$a_{1,2} = \frac{A}{m+\mu} \pm \sqrt{\frac{A^2}{(m+\mu)^2} + \frac{\mu B - A^2}{m(m+\mu)}} \quad \Leftrightarrow$$

$$a_{1,2} = \frac{A}{m+\mu} \pm \sqrt{\frac{mA^2 + \mu(m+\mu)B - (m+\mu)A^2}{m(m+\mu)^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$a_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{\frac{mA^2 - mA^2 + \mu A^2 + \mu(m+\mu)B}{m}}}{m+\mu} \quad \Leftrightarrow$$

$$a_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{\frac{\mu}{m} [(m+\mu)B - A^2]}}{m+\mu}$$

ergibt sich durch die Rücksubstitution mit

$$(x_1 - x) = \frac{-1}{a} \quad ; \quad A = \frac{p'}{p} \quad \text{und} \quad B = \frac{p'p' - pp''}{pp}$$

die Näherung

$$x_1 = x - \frac{(m+\mu)P}{P' \pm \sqrt{\frac{\mu}{m}[(m+\mu)(P'P' - PP'') - P'P']}}$$

Aus numerischen Stabilitätsgründen wird der Betrag des Nenners maximiert. Dafür wird als Vorzeichen der Wurzel im reellen Fall **sign(P')** und im komplexen Fall **sign(Re(P'))** gewählt. Damit erhält man die vom Parameter μ abhängige Verfahrensfamilie:

$$x_1 = x - \frac{(m+\mu)P}{P' + \text{sign}(P') \sqrt{\frac{\mu}{m}[(m+\mu)(P'P' - PP'') - P'P']}}$$

Je nach Wahl des Parameters μ erhält man folgende Verfahren:

Verfahrensfamilie		
μ	Name	Iteration
0	Newton	$x_1 = x - \frac{mP}{P'}$
m	Euler	$x_1 = x - \frac{2mP}{P' + \text{sign}(P') \sqrt{(2m-1)P'P' - 2mPP''}}$
$n-1$ ($m=1$)	Laguerre (klassisch)	$x_1 = x - \frac{nP}{P' + \text{sign}(P') \sqrt{(n-1)[(n-1)P'P' - nPP'']}}$
$n-m$	Laguerre (modifiziert)	$x_1 = x - \frac{nP}{P' + \text{sign}(P') \sqrt{\frac{n-m}{m}[n(P'P' - PP'') - P'P']}}$

- Hansen, Patrick: A family of root-finding methods, *Numer. Math.* 27, 1976, 257–269
- Hansen, Patrick, Rusnak: Some modifications of Laguerre's method, *BIT* 17, 1977, 409–417
- Petkovic, Petkovic, Zivkovic: HANSEN-PATRICK'S FAMILY IS OF LAGUERRE'S TYPE, *Novi Sad J. Math.*, Vol. 33, No. 1, 2003, 109–115

Eigenschaften des Laguerre-Verfahrens

Sind alle Nullstellen von $P(x)$ einfach und reell, dann gelten die Eigenschaften:

- Konvergenz tritt für jeden Startwert x_0 mit $P'(x_0) \neq 0$ ein.
- Die reellen Extremstellen von $P(x)$ trennen die Einzugsgebiete der Nullstellen. Jeder Startwert x_0 aus dem Intervall zwischen zwei benachbarten Extremstellen konvergiert monoton (nur von links, oder nur von rechts) genau gegen die eine Nullstelle, die in diesem Intervall liegt. Das Verfahren überschießt nie.
- lokal kubische Konvergenz gegen eine einfache Nullstelle.

Besitzt $P(x)$ nur reelle, aber auch mehrfache Nullstellen, dann gilt:

- lokal lineare Konvergenz des klassischen Verfahrens ($m = 1$) gegen eine mehrfache Nullstelle.
- lokal mindestens quadratische Konvergenz bei mehrfachen Nullstellen in $U_\varepsilon(x)$ bei Berücksichtigung der Vielfachheit m .
- Bei Berücksichtigung der Vielfachheit m kann das Verfahren überschießen, also das Intervall zwischen zwei benachbarten Extremstellen verlassen.

Besitzt $P(x)$ auch komplexe Nullstellen, dann kann:

- das Verfahren überschießen. Die Iterierte liegt dann in einem benachbarten Intervall, oder die Iterierte ist komplex.
- bei reellen Näherungen bleibt lokal mindestens quadratische Konvergenz gegen die Nullstelle unter Berücksichtigung der Vielfachheit m erhalten.

Idealerweise prüft man zunächst ob $a_0 = 0$ ist und dividiert die Nullstelle ab. Wenn $a_0 \neq 0$ ist, startet die Iteration mit: $x_0 = 1$ um sich einer möglichst betragskleinen Nullstelle zu nähern. Falls der Grad des Polynoms sehr hoch ist, streben die Funktionswerte bei Startwerten $|x_i| \ll 1$ schnell gegen Null. Bei Startwerten $|x_i| \gg 1$ werden die Funktionswerte sehr schnell sehr groß.

5 Weitere Nullstellenverfahren mit zweiter Ableitung

Eine Vielzahl von Verfahren beruht auf der Zerlegungsmethode von Adomian und der Taylor-Reihenentwicklung. Diese Verfahren sind bei einfachen Nullstellen lokal kubisch konvergent.

Das Halley-Verfahren

Das Halley-Verfahren kann auch als Grenzwertprozess der parameterabhängigen Verfahrensfamilie hergeleitet werden.

$$x_1 = x - \frac{2 m P P'}{(m+1)P' P' - m P P''}$$

- Hansen, Patrick: A family of root-finding methods, *Numer. Math.* 27, 1976, 257–269
- Gander: On Halley's iteration method, *Am. Math. Monthly* 92, 1985, 131–134
- Petkovic, Petkovic, Zivkovic: HANSEN–PATRICK'S FAMILY IS OF LAGUERRE'S TYPE, *Novi Sad J. Math.*, Vol. 33, No. 1, 2003, 109–115

Das BSC-Verfahren von Basto Semiao Calheiros

Dieses Verfahren wurde ohne Berücksichtigung der Vielfachheit entwickelt. Es kann jedoch der Vielfachheitsfaktor $\frac{m+1}{2}$ eingefügt werden.

$$x_1 = x - \frac{m+1}{2} \left(\frac{P}{P'} - \frac{P^2 P''}{2(P')^3 - 2P P' P''} \right)$$

Petkovic erweiterte das Verfahren um die dritte Ableitung. Siehe dazu: Kapitel 6: Nullstellenverfahren mit 3. Ableitung.

- Basto, Semiao, Calheiros: A new iterative method to compute nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 173, 2006, 468–483
- Petkovic: Comments on the Basto–Semiao–Calheiros root finding method, *Applied Mathematics and Computation* 184, 2007, 143–148

Das Chebyshev-Verfahren

Für das Chebyshev-Verfahren ist eine Iterationsformel bekannt, die die Vielfachheit der Nullstelle berücksichtigt.

$$x_1 = x - \frac{P}{P'} \left(\frac{m(3-m)}{2} + \frac{m^2}{2} \frac{P P''}{P' P'} \right)$$

- McNamee: *Numerical Methods for Roots of Polynomials (Part 2)*, 2013, Elsevier, Amsterdam

Das Ostrowski Verfahren

In der Literatur auch als Quadratwurzelverfahren bezeichnet, ist dieses Verfahren lokal kubisch konvergent.

$$x_1 = x - \frac{\sqrt{m} P}{\text{sign}(P') \sqrt{P' P' - P P''}}$$

- Ostrowski: *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, Academic Press, New York, 1973

Das Stoer-Bulirsch-Verfahren

Bei allen bisher vorgestellten Verfahren darf die erste Ableitung nicht verschwinden, da dies zur Division durch Null führen würde. Bei dem Verfahren von Stoer-Bulirsch, das auch auf der Taylor-Entwicklung beruht, darf die erste Ableitung verschwinden, (wobei dann der Richtungsfaktor $\text{sign}(P')$ entfällt), sofern die zweite Ableitung ungleich 0 ist.

$$x_1 = x - \frac{P' + \text{sign}(P') \sqrt{P' P' - 2P P''}}{P''}$$

- McNamee: *Numerical Methods for Roots of Polynomials (Part 1)*, 2007, Elsevier, Amsterdam

6 Nullstellenverfahren mit dritter Ableitung

Die Vielfachheit m in den Verfahren mit dritter Ableitung wird durch den Vielfachheitsfaktor $\frac{m+2}{3}$ von Vestermark berücksichtigt.

Achtung: Bei Verwendung der Vielfachheit kann jedes Verfahren auch deutlich überschießen. Die Vielfachheit m kann auf $m = 2$ begrenzt, oder auch bei großem Wert von m halbiert werden. Das Programm HPOLY verwendet bei einer Nichtbegrenzung von m den Mittelwert der beiden Vielfachheitswerte aus Kapitel 3.

Das Skowron-Verfahren

$$x_1 = x - \frac{m+2}{3} \frac{P}{P'} \left(1 + \frac{F}{2} + \frac{F^2}{2} - \frac{E}{6} - \frac{5}{12} FE + \frac{E^2}{12} + \dots \right) \text{ mit}$$

$$F = \frac{PP''}{(P')^2} \quad \text{und}$$

$$E = \frac{P^2 P'''}{(P')^3}$$

- Skowron, Gould: General Complex Polynomial Root Solver and Its Further Optimization for Binary Microlenses, arXiv preprint arXiv: 1203.1034, (2012)

Das erweiterte BSC-Petkovic-Verfahren:

$$x_1 = x - \frac{m+2}{3} \left(\frac{P}{P'} - \frac{P^2 P''}{2(P')^3 - 2P \left(P' P'' - \frac{(P')^2 P'''}{3P''} \right)} \right)$$

- Petkovic: Comments on the Basto–Semiao–Calheiros root finding method, Applied Mathematics and Computation 184, 2007, 143–148

Das K oenig-Verfahren (Householder-Verfahren 3. Ordnung)

$$x_1 = x - \frac{m+2}{3} \left(\frac{3P(2P'P' - PP'')}{6P'(P'P' - PP'') + PP'''} \right)$$

- Vestermark: A Modified Newton and higher orders Iteration for multiple roots. (2023)

7 Integration gebrochen rationaler Funktionen

Ist das Integral von Polynomen noch leicht zu bestimmen, so ist die Stammfunktion gebrochen rationaler Funktionen komplizierter zu bestimmen. Auf die Partialbruchzerlegung wird hier zugunsten der numerische Berechnung verzichtet. Die Stützstellen und Gewichte wurden für das Intervall $[-1 ; 1]$ berechnet und wie in den HP-65 MATH-PACs auf das Intervall $[a ; b]$ transformiert.

Gauß-Legendre Knoten und Gewichte (HP 65)	
Knoten x_i	Gewichte w_i
-0,9324695142	0,1713249424
-0,6612093865	0,3607615730
-0,2386191861	0,4679139346
0,2386191861	0,4679139346
0,6612093865	0,3607615730
0,9324695142	0,1713249424

- HP-65. MATH PAC2. Program 19A1 and 20A

Die Quadraturformeln aus dem HP-65 MATH PAC2

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{(b-a)x_i + a + b}{2}\right)$$

$$\int_a^\infty f(x) dx \approx 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{(1+x_i)^2} f\left(a + \frac{2}{1+x_i} - 1\right)$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \approx 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{(1+x_i)^2} f\left(a - \frac{2}{1+x_i} + 1\right)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &\approx \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx \\ &\approx 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{(1+x_i)^2} \left[f\left(1 - \frac{2}{1+x_i}\right) + f\left(\frac{2}{1+x_i} - 1\right) \right] \end{aligned}$$

Das Programm **HPOLY** verwendet die Quadraturformeln von Gauß-Kronrod. Der Vorteil liegt in der Einbettung der Stützstellen und Gewichte der Gauß-Formeln in die Kronrod-Formeln.

Die n -ten Stützstellen und die n -ten Gewichte der Gauß-Formel sind die $2n$ -ten Stützstellen und die $2n$ -ten Gewichte der Kronrod-Formel. Dadurch erhält man ohne Mehraufwand eine Abschätzung für den Quadraturfehler: $err \approx |K99 - G49|$. Es gilt demnach:

$$\int_a^b f(x) dx \cong K99 \pm err = K99 \pm |K99 - G49|$$

Die Berechnung der Stützstellen und Gewichte **G49K99** wurde mit:

<https://keisan.casio.com/exec/system/1289382036>

durchgeführt. Diese Internetseite war nach Mitte 2023 nicht mehr aufrufbar.

Tabelle: Gauß49-Kronrod99-Quadraturformel

i	Gauß-Kronrod Knoten x_i	Kronrod Gewichte w_i	Gauß-Gewichte w_i
1	-.999804199685638727994974003607983	0.00052747696837833231426392216677	0
2	-.998820150606635379361831272704111	0.00147796392817436202085567581223501	0.003027278988922905077480698175827
3	-.9968198142998264694012839590360078	0.00252187657314964968451363314444	0
4	-.9937886619441677907601138592579536	0.0035329557014832599891867695315599	0.007035099590086451473450678311348
5	-.989764238414064471063168293135	0.0045141331625998620836358420641829	0
6	-.9847578959142130043592989953685747	0.0055014203993380782040404696584139	0.0110205510315935804975082881668333
7	-.9787573030312066845298589027301962	0.006499872532166484516849830171239	0
8	-.9717622009015553801399724215047741	0.0074869102764140445198175459913945	0.0149621449356246510295843191202015
9	-.9637900181363554282611096000219869	0.008455185639775045670114558371764	0
10	-.954853658674137233555243679668184	0.0094175722296862066762316928503638	0.0188435958530894584444506533911073
11	-.944955059221329473155835112992641	0.0103787329241166077069683569328913	0
12	-.934100294755810149058982460636545	0.0113278438578780228794689725519478	0.0226492015874466764987709642160429
13	-.9223054754539361687554290102229532	0.0122591748799473589076504729170825	0
14	-.9095856558280732852130196403558001	0.0131792068212079366056557559621176	0.026363618927066016960945745239742
15	-.8959496245835934207352332018243469	0.014091111047270544037748385218045	0
16	-.8814084455730089100370315358170049	0.0149880989346802956592971874255513	0.0299718846205838253506905580741472
17	-.8659800043151457264442523756091547	0.015865723698872893130368150761464	0
18	-.8496821198441657010348818722429793	0.0167278985537773186823128361860891	0.0334594667916221743424871508916892
19	-.8325285014874601685172633163696317	0.0175768726412448262384462318590166	0
20	-.814534427359855431539500787764777	0.0184077538519825820281183776609503	0.0368123209630006898194672366988823
21	-.7957203207625248381360568099163764	0.0192169329826556442116763155896852	0
22	-.776106894345446635018142812248456	0.0200070643859274929265393916944815	0.0400169457663730213686050367431033
23	-.7557118903695143082456546843790014	0.0207798535198561693336617663172753	0
24	-.734554254237402696213674212858525	0.0215314818077816867538181700504126	0.0430604369812595979883454840010385
25	-.712657066705008830847420587154317	0.0222589139301299466359937854028854	0
26	-.6900438244251321135047518072749419	0.0229641216311680166298032506167028	0.04593053935559585354249961997212767
27	-.666735700841571667866116467842425	0.023648494373863135027606738151061	0
28	-.6427548324192376640568569485839001	0.0243089029298119497086904956086293	0.0486156958878282402776511972878685
29	-.618126817800879299161146713068752	0.0249427312116380137806008849854078	0
30	-.5928776941089007124558643367926285	0.025551567629898396796236813110352	0.0511050943301445906746228060493186
31	-.567031549495391732863107815442941	0.026136629572717056199681859247504	0
32	-.540613246991726066558225467229436	0.026695273107158037742721370750002	0.0533887107082589685279429337301762
33	-.513650628401734382311100884324782	0.0272252058087967119960015977339419	0
34	-.4861719414524920421769760960585751	0.0277278075508688728381337851641494	0.05545734967480358869043158148269807
35	-.4582036915390298548495608644613814	0.028204220570029200521357749544287	0
36	-.429772993341576524658584141807423	0.02865216671090199984955207682324	0.0573026815301874754851645923508165
37	-.4009095739292798809373223889102203	0.0290696140121504756930876722916518	0

38	-.371643501262284888863734540946961	0.0294578454056420734075586763875507	0.0589172757600272660245276507424925
39	-.3420031959918559601078363738324531	0.0298179973237107521896477020354547	0
40	-.3120175321197487622078606765064163	0.030148081066799933145430671257942	0.0602946309531520173031061168755416
41	-.2817177082410294178774691465638328	0.0304462797396858877385633903866	0
42	-.2511351786125772735071559428246113	0.0307138558577390833919631228468087	0.06142920097919293629682664614030107
43	-.2202997655098053353242633730358589	0.030951992615566392527522287324914	0
44	-.1892415924618135864853101738599865	0.031158937496597415869647162792595	0.0623164173200572674010768252159497
45	-.1579928776643683586660036556130289	0.0313330525912310597588614425068009	0
46	-.1265859972696720510679852885755362	0.0314756358269989035185166465702536	0.06295270746519569947439955578289101
47	-.095051649986123375660035089328368	0.0315879594586859731614238500111578	0
48	-.06342068498268678602883482087848497	0.0316684660566117158446164077085652	0.0633355092964917485908369274000905
49	-.0317258634590731536308193652686307	0.031715664503973344041013897230302	0
50	0	0.0317309313985218944090527052437375	0.0634632814047905977182534678795296
51	0.0317258634590731536308193652686307	0.0317156645039733440410138972303019	0
52	0.063420684982686786028834820878485	0.0316684660566117158446164077085652	0.06333550929649174859083692740009052
53	0.095051649986123375660035089328368	0.031587959458685973161423850011158	0
54	0.1265859972696720510679852885755362	0.0314756358269989035185166465702536	0.06295270746519569947439955578289101
55	0.157992877664368358666003655613029	0.031333052591231059758861442506801	0
56	0.1892415924618135864853101738599865	0.031158937496597415869647162792595	0.0623164173200572674010768252159497
57	0.220299765509805335324263373035859	0.0309519926155663925275222873249136	0
58	0.2511351786125772735071559428246113	0.0307138558577390833919631228468087	0.06142920097919293629682664614030107
59	0.2817177082410294178774691465638328	0.0304462797396858877385633903866002	0
60	0.312017532119748762207860676506416	0.030148081066799933145430671257942	0.06029463095315201730310611687554159
61	0.3420031959918559601078363738324531	0.029817997323710752189647702035455	0
62	0.3716435012622848888637345409469605	0.0294578454056420734075586763875507	0.05891727576002726602452765074249252
63	0.4009095739292798809373223889102203	0.029069614012150475693087672291652	0
64	0.429772993341576524658584141807423	0.02865216671090199984955207682324	0.05730268153018747548516459235081654
65	0.4582036915390298548495608644613814	0.0282042205700292005213577495442871	0
66	0.4861719414524920421769760960585751	0.0277278075508688728381337851641494	0.05545734967480358869043158148269807
67	0.5136506284017343823111008843247821	0.0272252058087967119960015977339419	0
68	0.5406132469917260665582254672294359	0.026695273107158037742721370750002	0.05338871070825896852794293373017621
69	0.5670315494953917328631078154429413	0.0261366295727170561996818592475035	0
70	0.5928776941089007124558643367926285	0.025551567629898396796236813110352	0.05110509433014459067462280604931856
71	0.6181268178008792991611467130687517	0.0249427312116380137806008849854078	0
72	0.6427548324192376640568569485839	0.024308902929811949708690495608629	0.04861569588782824027765119728786853
73	0.6667357008415716678661164678424251	0.023648494373863135027606738151061	0
74	0.690043824425132113504751807274942	0.0229641216311680166298032506167028	0.04593053935559585354249961997212767
75	0.7126570667050088308474205871543169	0.022258913930129946635993785402885	0
76	0.7345542542374026962136742128585249	0.0215314818077816867538181700504126	0.0430604369812595979883454840010385
77	0.7557118903695143082456546843790014	0.020779853519856169333661766317275	0
78	0.7761068943454466350181428122484561	0.0200070643859274929265393916944815	0.04001694576637302136860503674310332
79	0.7957203207625248381360568099163764	0.0192169329826556442116763155896852	0
80	0.814534427359855431539500787764777	0.0184077538519825820281183776609503	0.0368123209630006898194672366988823
81	0.832528501487460168517263316369632	0.0175768726412448262384462318590166	0
82	0.8496821198441657010348818722429793	0.016727898553777318682312836186089	0.0334594667916221743424871508916892
83	0.8659800043151457264442523756091547	0.015865723698872893130368150761464	0
84	0.8814084455730089100370315358170049	0.014988098934680295659297187425551	0.0299718846205838253506905580741472
85	0.8959496245835934207352332018243469	0.0140911110472705440377483852180448	0
86	0.9095856558280732852130196403558001	0.013179206821207936605655755962118	0.026363618927066016960945745239742
87	0.922305475453936168755429010222953	0.0122591748799473589076504729170825	0
88	0.934100294755810149058982460636545	0.0113278438578780228794689725519478	0.0226492015874466764987709642160429
89	0.9449550592213294731558351129926407	0.010378732924116607706968356932891	0
90	0.954853658674137233552436796681844	0.0094175722296862066762316928503638	0.0188435958530894584444506533911073
91	0.9637900181363554282611096000219869	0.0084551856397750456701145583717636	0
92	0.971762200901555380139972421504774	0.00748691027641404451981754599139445	0.0149621449356246510295843191202015
93	0.9787573030312066845298589027301962	0.0064998725321664845168498301712395	0
94	0.984757895914213004359298953685747	0.0055014203993380782040404696584139	0.0110205510315935804975082881668333
95	0.9897642384140644710631682931350003	0.0045141331625998620836358420641829	0
96	0.993788661944167790760113859257954	0.0035329557014832599891867695315599	0.007035099590086451473450678311348
97	0.9968198142998264694012839590360078	0.0025218765731496496845136331444401	0
98	0.99882015060663579361831272704111	0.001477963928174362020855675812235	0.003027278988922905077480698175827
99	0.9998041996856387279949740036079827	0.00052747696837833231426392216677	0

8 Plotten: Das “interessante“ Intervall

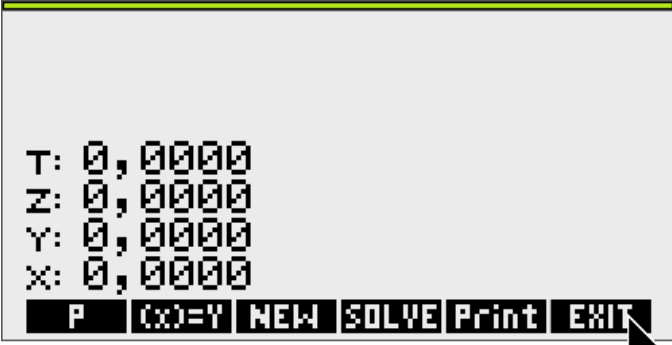
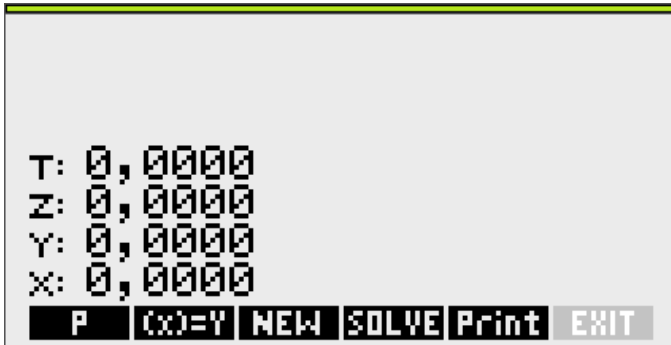
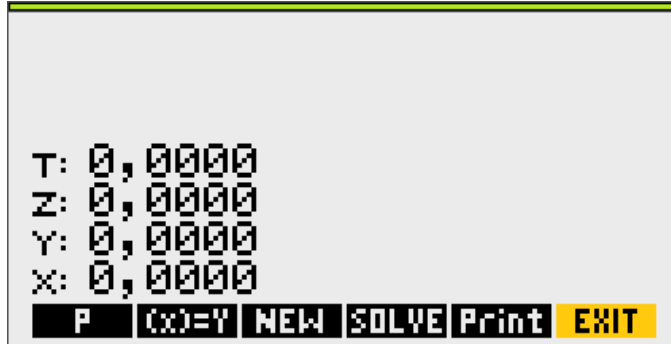
Als Intervallobergrenze wird die Summe der Beträge der Polynomkoeffizienten gebildet. Es ist $x_+ = \sum_{i=0}^n \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$. Das Maximum wird auf $x_+ = \mathbf{min}(x_+; 1000)$ und das Minimum wird auf $x_- = -x_+$ begrenzt. Mit diesen Startwerten wird das Intervall $[x_-, x_+]$ von beiden Seiten geschachtelt. Rechtsseitig werden die Schrittweiten:

$$h_{+0} = \frac{P(x_+)}{P'(x_+)}; \quad h_{+1} = \frac{P'(x_+)}{P''(x_+)} \quad \text{und} \quad h_{+2} = \frac{P''(x_+)}{P'''(x_+)}$$

gebildet. Mit der kleinsten Schrittweite $h_+ = \mathbf{min}(h_{+0}; h_{+1}; h_{+2})$ wird die rechte Intervallgrenze auf $x_+ = x_+ - h_+$ gesetzt. Beendet wird die Schachtelung dann, wenn die Schrittweite $h_+ < 0,1$ ist. Völlig analog wird dann die Intervallgrenze x_- ermittelt. Dadurch wurde mit jeweils geeigneter Schrittweite das Intervall derart geschachtelt, dass die kleinste/größte reelle Nullstelle, sowie der am weitesten links/rechts liegende Extremwert und auch der am weitesten links/rechts liegende Wendepunkt im “interessanten“ Intervall enthalten sind. Um einen Funktionsplot im Display sinnvoll darzustellen, muss zur Orientierung die X-Y-Achse im Display erscheinen. Deshalb beginnt das automatische Intervall der X-Achse links von der Null und endet rechts von der Null. Ist nach der Schachtelung $x_- > 0$, wird $x_- = 0$ gesetzt. Für $x_+ < 0$ gilt demnach: $x_+ = 0$.

Um für die Y-Achse ein Intervall vorzugeben, werden zu allen Argumenten x_i die Funktionswerte $P(x_i)$ berechnet. Das Intervall $[Y_-; Y_+]$ mit $Y_- = \mathbf{min}(0; P(x_i))$ und $Y_+ = \mathbf{max}(0; P(x_i))$ legt dann den druckbaren Bereich fest. Bei gebrochenen rationalen Funktionen kann es durch Polstellen vom Betrag her sehr große Intervallgrenzen geben. Nach einer Anpassung der Minimal- und Maximalwerte sollte dann etwa 80% der Kurve im druckbaren Bereich erscheinen und die zu großen, sowie die zu kleinen Werte am oberen, bzw. unteren Displayrand ausgegeben werden.

9 Bebilderte Kurzanleitung der HPOLY-Funktionen

Aktion	⇔	Handbuch
MENU-Taste "EXIT" drücken 		
"SHIFT" und "EXIT" drücken 		

Initialisierung HPREG-Matrix

 oder wenn das Programm HPOLY einer Taste zugewiesen ist: 	 Falls bisher keine HPReg-Datei existierte, ist sie jetzt angelegt.
--	---

Formeln und Funktionen des Programms HPOLY

```
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
```

P (X)=Y NEW SOLVE Print EXIT

```
Plus42 Print-Out
=====
HPOLY
=====
FORMELN Vielfachheit

      Y'Y'
m = ----
    Y'Y' - YY''

      YY''
m = 1 + ----
      YY'' - Y'Y'

      2[Y'Y' - YY'']^3
m = ----
    [YYY''' - 3YY'Y'' + 2Y'^3]^2

NULLSTELLEN-VERFAHREN:
Laguerre

      n
X = X - ----
      F + [sign(F)]W

W = sqrt[(n-m)/m][nG-FF]
F = Y' / Y
G = [Y'Y' - YY''] / YY

Basto Semiao Calheiras

      Y      YYY''
X = X - -- - ----
      Y'    2Y'Y'Y'-2YB

B = [Y'Y''-P] (-Petkovic)
P = [Y'Y'Y'''] / 3Y''

Skowron

      Y      YS
X = X - -- - ----
      Y'    12Y'

S = 6F+6FF-2E-5EF+EE
F = [(YY'') / (Y'Y')]
E = [(YYY''') / (Y'Y'Y')]
```

König: Householder 3.Ord

$$X = X - \frac{G}{H}$$

$$G = 6YY'Y' - 3YYY''$$

$$H = 6Y'Y'Y' - 6YY'Y'' + YYY'''$$

Chebyshev

$$X = X - \frac{mY}{Y'} \left[\frac{3-m}{2} + \frac{mYY''}{2Y'Y'} \right]$$

Halley

$$X = X - \frac{Y}{\frac{m+1}{2m}Y' - \frac{YY''}{2Y'}}$$

Ostrowski

$$X = X - \frac{\sqrt{m}Y}{[\text{SIGN}(Y')]W}$$

$$W = \sqrt{Y'Y' - YY''}$$

Stoer-Bulirsch

$$X = X - \frac{Y' + [\text{SIGN}(Y')]W}{Y''}$$

$$W = \sqrt{Y'Y' - 2YY''}$$

Lin-Bairstow

	an	an-1	...	a1	ao
p	↓	-pbn	...	-pb2	-pb1
q	↓	0	...	-qb3	-qb2

	bn	bn-1	...	b1	bo
p	↓	-pcn	...	-pc2	
q	↓	0	...	-qc3	

	cn	cn-1	...	c1	co

```
extrn. VERFAHREN
```

```
LBL "..."  
RCL "XP"    XP = X  
RCL "P0"    P0 = P(X)  
RCL "P1"    P1 = P'(X)  
RCL "P2"    P2 = P''(X)  
RCL "P3"    P3 = P'''(X)  
RCL "P4"    P4 = p''''(X)  
                Vielfachheit  
RCL "#M"    Parameter  
RCL "#m"    berechnet  
RCL "#CNT"  Anz. Iter.  
:
```

```
:  
Zwischenberechnungen:  
Alpha = Xext0...Xext9  
X-Reg = X  
XEQ "HPOLY"  
RCL "Xext0"... "Xext9"  
    X0          X9  
RCL "Y0ext0".. "Y4ext9"  
    Y(X0)      Y''''(X9)  
:  
(opt.) STO "XP"  
RTN END
```

```
=====
```

Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades

$$P(x) = (0 \text{ oder } 1) x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

```
{ HOME }
```

```
G2G_
```

```
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
```

```
{ HOME }
```

```
G3G_
```

```
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
```

```
{ HOME }
```

```
G4G_
```

```
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
```

```
{ HOME }
```

```
T: a3
```

```
Z: a2
```

```
Y: a1
```

```
X: a0
```

```
XEQ
```

```
HPOLY
```

```
Nullstellen GnG:
```

```
X4 X3 X2 X1
```

```
T: X4
```

```
Z: X3
```

```
Y: X2
```

```
X: X1
```

```
CPn
```

```
EXIT
```

```
{ HOME }
```

```
T: a3
```

```
Z: a2
```

```
Y: a1
```

```
X: a0
```

```
GnG
```

Bei einer **G4G** ist der Koeffizient $a_4 = 1$ vorgegeben. Bei der **G2G** ist der Inhalt von **T** bedeutungslos.

Koeffizienten zweiten Grades berechnen

{ HOME }

CP2_

ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ

{ HOME }

T: 0,0000

Z: 0,0000

Y: X1

X: X2

XEQ

HPOLY

POLY

oder

{ HOME }

T: 0,0000

Z: 0,0000

Y: 0,0000

X: X1 iY1

XEQ

HPOLY

POLY

Koeffizienten G2G:

- a2 a1 a0

T: 0,0000

Z: a2

Y: a1

X: a0

G2G

EXIT

Koeffizienten G2G:

- a2 a1 a0

T: 0,0000

Z: a2

Y: a1

X: a0

G2G

EXIT

Nullstellen G2G:

- - X2 X1

T: 0,0000

Z: 0,0000

Y: X2 iY2

X: X1 iY1

CP2

EXIT

Koeffizienten dritten Grades berechnen

{ HOME }

CP3_

ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ

{ HOME }

T: 0,0000

Z: X1

Y: X2

X: X3

XEQ

HPOLY

POLY

oder

{ HOME }

T: 0,0000

Z: 0,0000

Y: X1

X: X2 iY2

XEQ

HPOLY

POLY

oder

{ HOME }

T: 0,0000

Z: 0,0000

Y: X1 iY1

X: X3

XEQ

HPOLY

POLY

Koeffizienten G3G:

a3 a2 a1 a0

T: a3

Z: a2

Y: a1

X: a0

G3G

EXIT

Koeffizienten G3G:

a3 a2 a1 a0

T: a3

Z: a2

Y: a1

X: a0

G3G

EXIT

Nullstellen G3G:

- X3 X2 X1

T: 0,0000

Z: X3 iY3

Y: X2 iY2

X: X1

CP3

EXIT

Koeffizienten vierten Grades berechnen

{ HOME }

CP4_

ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ

{ HOME }

T: X1
Z: X2
Y: X3
X: X4
XEQ

HPOLY

POLY

oder

{ HOME }

T: 0,0000
Z: "X1"
Y: "X2"
X: "X3 iY3"
XEQ

HPOLY

POLY

oder

{ HOME }

T: 0,0000
Z: "X1"
Y: "X2 iY2"
X: "X4"
XEQ

HPOLY

POLY

...

... oder

{ HOME }

T: 0,0000
Z: "X1 iY1"
Y: "X3"
X: "X4"
XEQ

HPOLY

POLY

oder

{ HOME }

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: "X1 iY1"
X: "X3 iY3"
XEQ

HPOLY

POLY

Koeffizienten G4G:
"1" a3 a2 a1 a0

T: a3
Z: a2
Y: a1
X: a0

G4G EXIT

Eingabe der Polynomkoeffizienten durch „COPY“

Grad Polynom	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
6	1	-6	0	50	-45	-108	108

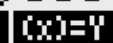
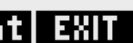
STRG "C"

1	-6	0	50	-45	-108	108
---	----	---	----	-----	------	-----

XEQ "HPOLY" oder 

P(X) selektiert

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

{ HOME }

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

GRAD P(x) = ?

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 6_



A6 = ?

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 1,0000



INPUT: Ai

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

STRG "V"

{ HOME }

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: [1x7 Matrix]

Eingabe P(X) erfolgt

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

Eingabe der Nullstellen des Polynoms durch „COPY“

Nullstellen	x_1	x_2	x_3	x_4
	2	-3	4	-5

STRG "C"

2 -3 4 -5

XEQ "HPOLY" oder POLY

P(X) selektiert

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P (X)=Y NEW SOLVE Print EXIT

< HOME >

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P Ai Xi DEL PrtP BACK

INPUT: An = ?

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 1,0000

R/S

INPUT: X1

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 1,0000
X: 1,0000

P =PXi Xi:Xn PrtXi PrtP END

STRG "V"

INPUT: X1

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 1,0000
X: [1x4 Matrix]

P =PXi Xi:Xn PrtXi PrtP END

Eingabe P(X) erfolgt

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

Q (X)=Y NEW SOLVE Print EXIT

Eingabe der Polynomkoeffizienten

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

XEQ "HPOLY" oder **POLY**

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P **(X)=Y** **NEW** **SOLVE** **Print** **EXIT**

< HOME >

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P **A1** **X1** **DEL** **PrtP** **BACK**

GRAD P(x) = ?

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 3_

R/S

A3 = ?

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 1,0000

R/S

INPUT: A1

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

A2 **i↑ A1 A1↑ i** **END**

< HOME >

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: -1_

A2 **i↑ A1 A1↑ i** **END**

< HOME >

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: -4_

A1 **i↑ A1 A1↑ i** **END**

< HOME >

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 4_

A0 **i↑ A1 A1↑ i** **END**

Eingabe P(X) erfolgt

Q **(X)=Y** **NEW** **SOLVE** **Print** **EXIT**

Eingabe der Polynomkoeffizienten

$$P(x) = x^{100} - 1$$

```

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P (x)=Y NEW SOLVE Print EXIT

```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: -1_
A99 i↑ Ai Ai↑ i END

```

oder

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P Ai Xi DEL PrtP BACK

```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: -1,0000
X: 0_
A99 i↑ Ai Ai↑ i END

```

```

GRAD P(x) = ?
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 100_

```

R/S

```

A100 = ?
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 1,0000

```

R/S

Eingabe P(X) erfolgt

```

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P (x)=Y NEW SOLVE Print EXIT

```

Eingabe der Nullstellen des Polynoms

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 4)(x + 5)$$

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P (X)=Y NEW SOLVE Print EXIT

INPUT: X2

T: 1,0000
Z: 1,0000
Y: 1,0000
X: -3_

P =PxXi PrtXi PrtP END

{ HOME }

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P Ni Xi DEL PrtP BACK

INPUT: X3

T: 1,0000
Z: 2,0000
Y: 3,0000
X: 4_

P =PxXi PrtXi PrtP END

INPUT: An = ?

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 1,0000

R/S

INPUT: X4

T: 1,0000
Z: 3,0000
Y: 4,0000
X: -5_

P =PxXi PrtXi PrtP END

INPUT: X1

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 1,0000
X: 2_

P =PxXi PrtXi PrtP END

INPUT: X5

T: 1,0000
Z: 1,0000
Y: 4,0000
X: 5,0000

P =PxXi X1:Xn PrtXi PrtP END

```

Plus42 Print-Out
MAT-Xi= [ 1x5 Matrix ]
1:1= "Xi"
1:2= 2,0000
1:3= -3,0000
1:4= 4,0000
1:5= -5,0000

```

INPUT: X5

T: 5,0000
Z: 5,0000
Y: 5,0000
X: 5,0000

P =PXi Xi:Xn PrtXi PrtP END

```

Plus42 Print-Out
PFI= [ 1x6 Matrix ]
1:1= 4,0000
1:2= 1,0000
1:3= 2,0000
1:4= -25,0000
1:5= -26,0000
1:6= 120,0000

```

INPUT: X5

T: 1,0000
Z: 1,0000
Y: 4,0000
X: 5,0000

P =PXi Xi:Xn PrtXi PrtP END

Eingabe P(X) erfolgt

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 2,5_

P (x)=Y NEW SOLVE Print EXIT

0 0 P(X) X

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: -30,9375
X: 2,5000

P (x)=Y NEW SOLVE Print EXIT

Menu für Integration und Ableitungen

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 4)(x + 5)$$

$$Q(x) = x^2 - 1$$

**Eingabe der Polynome
 $P(x)$ und $Q(x)$
wie oben beschrieben.**

Eingabe Q(X) erfolgt

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

Q (X)=Y NEW SOLVE Print EXIT

∫Q (X)=Y Print EXIT

Q' (X)=Y SOLVE Print EXIT

Q'' (X)=Y SOLVE Print EXIT

f = P/Q

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

f (X)=Y Print EXIT

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

f ←Prt TABLE CopyX PLOT BACK

Plus42 Print-Out

$$f(X) = P(X)/Q(X)$$

Grad, An ... Ao

P(X)=		[1x6 Matrix]
1:1=		4,0000
1:2=		1,0000
1:3=		2,0000
1:4=		-25,0000
1:5=		-26,0000
1:6=		120,0000

Q(X)=		[1x4 Matrix]
1:1=		2,0000
1:2=		1,0000
1:3=		0,0000
1:4=		-1,0000

f ←Prt TABLE CopyX PLOT BACK

f (X)=Y Print EXIT

∫f = ∫P/Q selektiert

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

∫f GTD EXIT

Z = ∫f(x)dx=F(Y)-F(X)
INPUT ■X ■Y ↓=-∞ ↑=∞

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

∫f ■∫■ ■∫↑ ↓∫■ ↓∫↑ BACK

$$\boxed{\text{f}} \int_a^b f(x) dx$$

$$\boxed{\text{f}} \uparrow \int_a^\infty f(x) dx$$

$$\downarrow \boxed{\text{f}} \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$\downarrow \boxed{\text{f}} \uparrow \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

Z = $\int f(x) dx = F(Y) - F(X)$
 INPUT $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\text{Y}}$ $\downarrow = -\infty$ $\uparrow = \infty$

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}} \uparrow$ $\downarrow \boxed{\text{f}}$ $\downarrow \boxed{\text{f}} \uparrow$ BACK

{ HOME }

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 5,0000
 X: 4_

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}} \uparrow$ $\downarrow \boxed{\text{f}}$ $\downarrow \boxed{\text{f}} \uparrow$ BACK

|err| $\int f(x) dx$ Y X

T: 3,0000E-33
 Z: 1,0000
 Y: 5,0000
 X: 4,0000

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}} \uparrow$ $\downarrow \boxed{\text{f}}$ $\downarrow \boxed{\text{f}} \uparrow$ BACK

|err| = |Gauß49 - Kronrod99|

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}} \uparrow$ $\downarrow \boxed{\text{f}}$ $\downarrow \boxed{\text{f}} \uparrow$ BACK

$\boxed{\text{f}}$ GTO $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{f}}$ EXIT

f' = (QP'-PQ')/QQ sel.

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

$\boxed{\text{f'}}$ (x)=Y $\boxed{\text{f'}}$ Print EXIT

g = QP'-PQ' selektiert

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

$\boxed{\text{g}}$ (x)=Y $\boxed{\text{g}}$ SOLVE Print EXIT

f'' = [Q(QP''-PQ'')-2Q'g]
 /QQQ

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

$\boxed{\text{f''}}$ (x)=Y $\boxed{\text{f''}}$ Print EXIT

h = Q(QP''-PQ'')-2Q'g

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

$\boxed{\text{h}}$ (x)=Y $\boxed{\text{h}}$ SOLVE Print EXIT

P(X) selektiert

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

$\boxed{\text{P}}$ (x)=Y $\boxed{\text{P}}$ NEW SOLVE Print EXIT

Polynomoperationen

Tausch – Multiplikation – Addition – Subtraktion

```

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P  (X)=Y  NEW  SOLVE  Print  EXIT
    
```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P:P*xQ  NEQ  BACK
    
```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P  Hi  Xi  PrtP  BACK
    
```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P:P+Q  NEQ  BACK
    
```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
Q  Hi  Xi  PrtQ  BACK
    
```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P:P-Q  NEQ  BACK
    
```

```

{ HOME }
T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
P<>Q  NEQ  BACK
    
```

Polynomoperationen

P<>Q Polynomtausch: $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

P:P*xQ Multiplikation: $P(x)=P(x)*Q(x)$

P:P+Q Addition: $P(x)=P(x)+Q(x)$

P:P-Q Subtraktion: $P(x)=P(x)-Q(x)$

NEQ Führe die Funktion aus

BACK Verlasse das Menu

Graphiken

TABLE PLOT PHASE

Eingabe des Polynoms

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 2)$$

wie oben beschrieben

Eingabe P(X) erfolgt

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P $\leftrightarrow$ Y NEW SOLVE Print EXIT

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P $\leftrightarrow$ Prt TABLE CopyX PLOT BACK

--- Xinc Xmax Xmin

T: 0,0000
Z: 0,4200
Y: 2,7000
X: -1,5000

P Xmin Xmax Xinc NEO BACK

Xinc Schrittweite

Xinc Anzahl der Schritte

Plus42 Print-Out		
Grad, An ... Ao		
P(X)=	[1x5 Matrix]	
1:1=		3,0000
1:2=		1,0000
1:3=		-3,0000
1:4=		0,0000
1:5=		4,0000

TABELLE: P(x)		
x	P(x)	***
-1,5000	-6,1250	***
-1,0800	-0,7589	***
-0,6600	2,4057	***
-0,2400	3,8134	***
0,1800	3,9086	***
0,6000	3,1360	***
1,0200	1,9400	***
1,4400	0,7652	***
1,8600	0,0561	***
2,2800	0,2572	***
2,7000	1,8130	***

TAB Xinc Xmax Xmin

T: [11x2 Matrix]
Z: 0,4200
Y: 2,7000
X: -1,5000

P Xmin Xmax Xinc NEO BACK

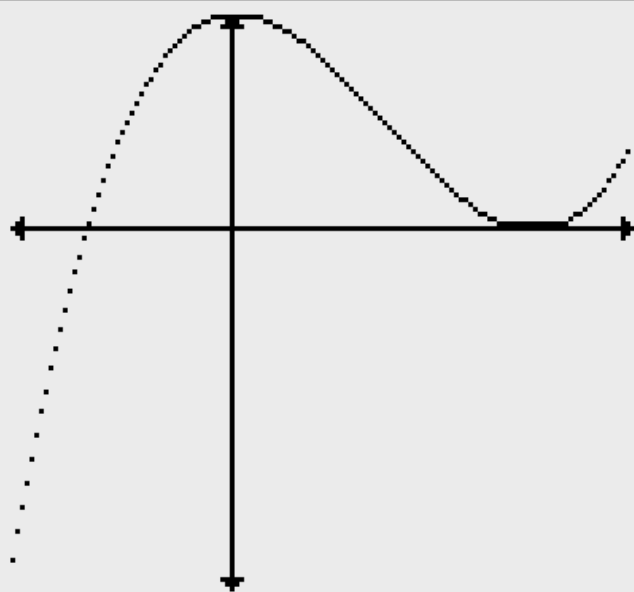
T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

P **←Prt** **TABLE** **Copy%** **PLOT** **BACK**

Ymax Ymin Xmax Xmin

T: 4,0000
 Z: -6,7000
 Y: 2,7000
 X: -1,5000

Xmin **Xmax** **Ymin** **Ymax** **NEQ** **BACK**



PHASE

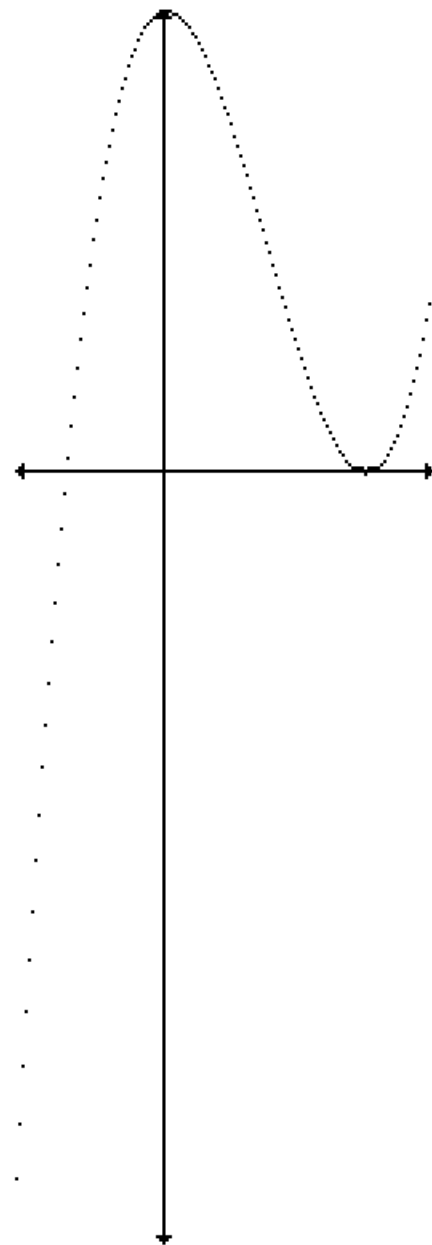
PAPER

BACK

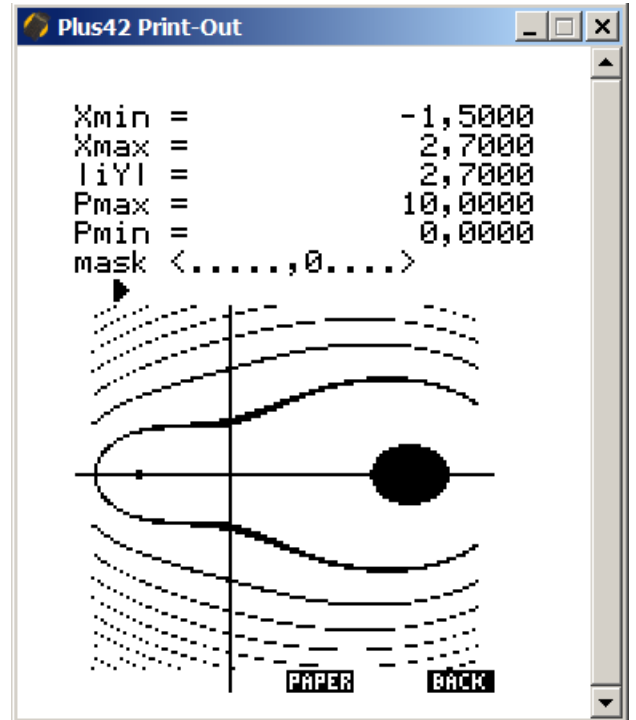
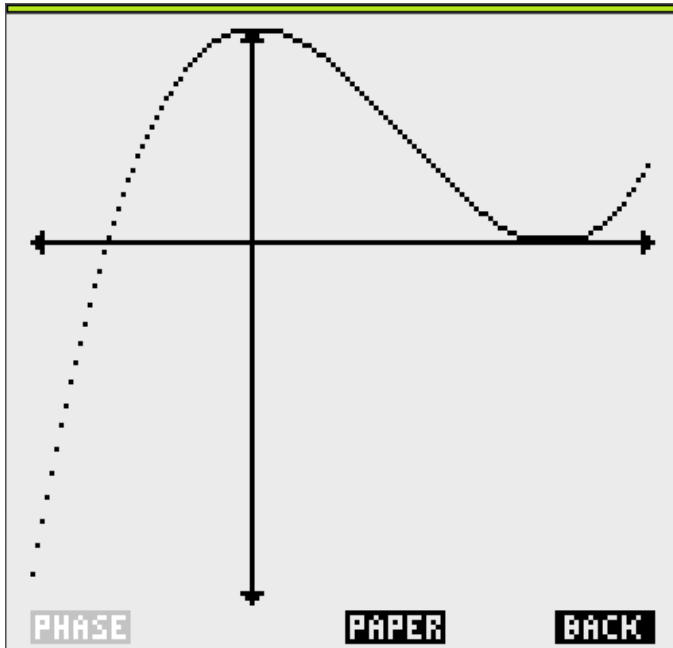
Plus42 Print-Out

$Y(x) = P(x)$

Ymax = 4,0000
 Ymin = -6,7000
 Xmax = 2,7000
 Xmin = -1,5000



VZW $P(x)$, $x = -1,0191$
 VZW $P(x)$, $x = -0,9870$



.....,0... iY max min

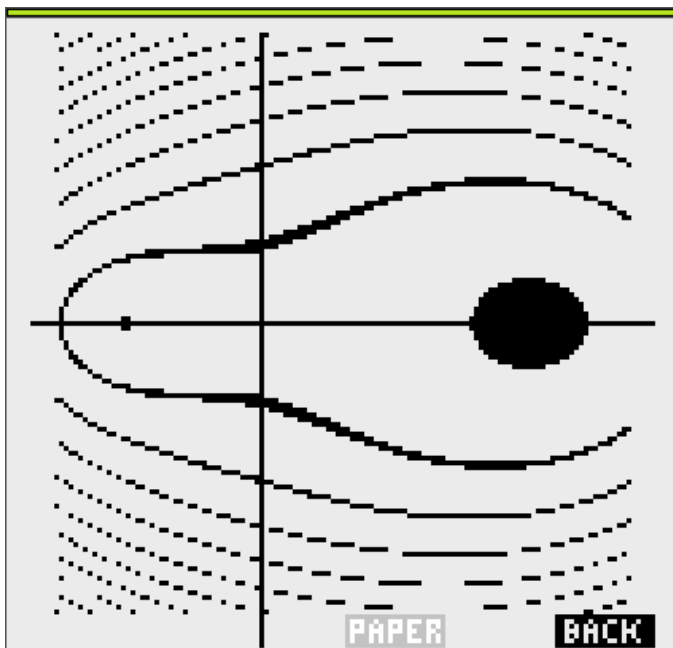
T: 0,1000
 Z: 2,7000
 Y: 10,0000
 X: 0,0000

Pmin Pmax |Y| <0.0> XEQ BACK

.....,0... iY max min

T: 0,1000
 Z: 2,7000
 Y: 10,0000
 X: 0,0000

Pmin Pmax |Y| <0.0> XEQ BACK



Ymax Ymin Xmax Xmin

T: 4,0000
 Z: -6,7000
 Y: 2,7000
 X: -1,5000

Ymin Ymax Xmin Xmax XEQ BACK

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 0,0000

P <Prt TABLE CopyX PLOT BACK

Copy & Paste to Phase:
Xmin Xmax +/-iY P(z)

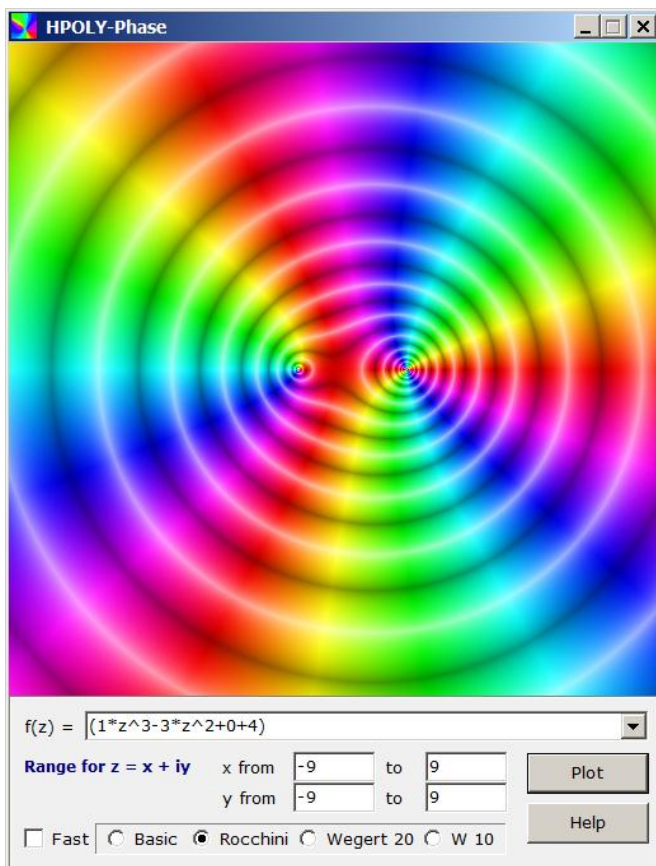
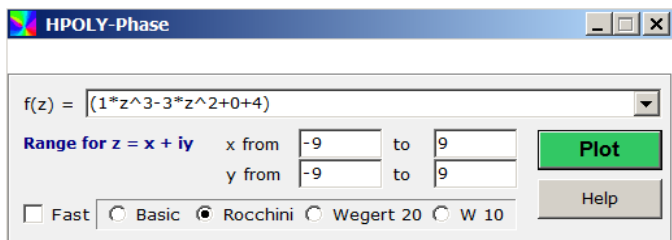
T: -1,5000
z: 2,7000
Y: 2,7000
X: "(1*z^3-3*z^2+0+4)"

Grph Phase BACK

STRG "C"

WINDOWS: "phase.exe"

STRG "V"



ANDROID

"Komplexe Funktionen"

f(z)= (1*z^3-3*z^2+0+4)

Berechnen

Farbton: Winkel

Helligkeit: Nicht anzeigen

Wertebereich verändern Bild speichern



Copy & Paste to Phase:
Xmin Xmax +/-iY P(z)

T: -1,5000
z: 2,7000
Y: 2,7000
X: "(1*z^3-3*z^2+0+4)"

Grph Phase BACK

Nullstellenberechnung

SOLVE

$$P(x) = x^6 - 6x^5 + 0x^4 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108$$

Eingabe P(X) erfolgt

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000

P 000=Y NEW SOLVE Print EXIT

#IT YDIFF XDIFF Xo
... 0 von 6 berechnet

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000

P 1 LAG PARA NEO BACK

#IT YDIFF XDIFF Xo
... 0 von 6 berechnet

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000

P ALL LAG PARA NEO BACK

6 Nullstellen: maxYi
ΣYi ΣXi-(An-1) πXi-Ao

T: 1,1578E-9
Z: 2,5137E-9
Y: 0,0000
X: 2,4477E-10

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

Plus42 Print-Out

```

=====
Y(X) = P(X)

      GRAD / An / ... / Ao
P(X)= [ 1x8 Matrix ]
1:1=      6,0000
1:2=      1,0000
1:3=     -6,0000
1:4=      0,0000
1:5=     50,0000
1:6=    -45,0000
1:7=   -108,0000
1:8=     108,0000

METHOD: LAG
max|Yi| = 1,1578E-9
Σ|P(Xi)| = 2,5137E-9
|ΣXi - An-1| = 0,0000
|πXi - Ao| = 2,4477E-10
Σerr = 2,7585E-9

CNT: i=0
P1 = 0,0000
X1 = 1,0000

CNT: i=11
P2 = -6,6055E-11
X2 = 2,9999

CNT: i=11
P3 = 1,1578E-9
X3 = -2,0000

CNT: i=11
P4_Im = -1,0275E-14
P4_Re = -6,6037E-11
|P4| = 6,6037E-11
X4_Im = -0,0001
X4_Re = 3,0001

CNT: i=11
P5_Im = 1,0275E-14
P5_Re = -6,6037E-11
|P5| = 6,6037E-11
X5_Im = 0,0001
X5_Re = 3,0001

CNT: i=1
P6 = 1,1578E-9
X6 = -2,0000
    
```

6 Nullstellen: maxYi
 ΣY_i $\Sigma X_i - (An-1)$ $\pi X_i - A_0$

T: 1,1578E-9
 Z: 2,5137E-9
 Y: 0,0000
 X: 2,4477E-10

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

1/6 #CNT=0 R/S
 $|Y(X)|$ $Y(X)$ X_{im} X_{re}

T: 0,0000
 Z: 0,0000
 Y: 0,0000
 X: 1,0000

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

R/S

2/6 #CNT=11 R/S
 $|Y(X)|$ $Y(X)$ X_{im} X_{re}

T: 6,6055E-11
 Z: -6,6055E-11
 Y: 0,0000
 X: 2,9999

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

X = 2,9998902700341353
 67536172929405071

T: 6,6055E-11
 Z: -6,6055E-11
 Y: 0,0000
 X: 2,9999

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

6 Nullstellen: maxYi
 ΣY_i $\Sigma X_i - (An-1)$ $\pi X_i - A_0$

T: 1,1578E-9
 Z: 2,5137E-9
 Y: 0,0000
 X: 2,4477E-10

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

10 Nachiterationen

{ HOME }

T: 2,5137E-9
 Z: 0,0000
 Y: 2,4477E-10
 X: 10_

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

6 Nullstellen: maxYi
 ΣY_i $\Sigma X_i - (An-1)$ $\pi X_i - A_0$

T: 6.6055E-11
 Z: 1.9813E-10
 Y: 2.8758E-12
 X: 1.4877E-10

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

Copy & Paste to Excel
 Nullstellen $P(X_i)=0$

T: 0
 Z: 0
 Y: 0
 X: [6x6 Matrix]

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

Struktur der nx6 Matrix

Iter.	X re	X im	Y re	Y im	Y
-------	------	------	------	------	---

R/S

6 Nullstellen: maxYi
 ΣY_i $\Sigma X_i - (An-1)$ $\pi X_i - A_0$

T: 6.6055E-11
 Z: 1.9813E-10
 Y: 2.8758E-12
 X: 1.4877E-10

SHOW PRT LAG N-IT Xi Yi BACK

Nullstellen: Verfahren und Verfahrensparameter

SOLVE

```
#IT  YDIFF  XDIFF  Xo
... 0 von 6 berechnet

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000

P  ALL  LAG  PARA  NEO  BACK
```

Verfahren

- LAG** Laguerre-Verfahren
- Nwtn** Newton-Verfahren
- BAIR** (Lin-Bairstow-Verfahren)
- BSC** Basto Semiao Calheiras
- SKOW** Skowron-Verfahren
- KOE** Koenig-Verfahren:
(Householder 3. Ordnung)
- Auto** auto. Verfahren $\min(|y_{i+1}|)$
- extrn** externes Programm

```
#IT  YDIFF  XDIFF  Xo
... 0 von 6 berechnet

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000

P  ALL  LAG  PARA  NEO  BACK
```

```
_ #IT |Ydiff| |Xdiff|

T: "LAG"
Z: 99,0000
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000E-10

#IT  Xdiff  Ydiff  PRT0  m=1  BACK
```

Parameter der Verfahren

- #IT** Anzahl der Iterationen.
- Xdiff** $\leq |x_i - x_{i-1}|$ dann x_i akzept.
- Ydiff** $\leq |Y_i|$ dann x_i akzeptieren.
- PRT0** nur Ergebnisse drucken.
- PRT-** keine Druckausgabe.
- PRT+** drucke jeden Iterationsschritt.
- m=1** Iteration mit Vielfachheit 1.
- m≤2** Vielfachheit ist höchstens 2.
- m/2** Vielfachheit wird halbiert.
- m=m** Iteration mit Vielfachheit m .

Nullstellen: Lin-Bairstow Verfahren

SOLVE

```
#IT  YDIFF  XDIFF  Xo
... 0 von 6 berechnet

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000
P ALL BAIR PARA GTO BACK
```

```
INPUT: Startwerte
... 0 von 6 berechnet

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
BAIR p;q X1:X2 auto PARA BACK
```

```
#IT  dp  dq  |B0|+|B1|

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000E-10
#IT dp:dq dB0B1 PRT0 ALL BACK
```

Parameter:

- #IT** Anzahl der Iterationen
- dp:dq** $\leq |dp| + |dq|$: p,q akzept.
- dB0B1** $\leq |B_0| + |B_1|$: p,q akzept.
- PRT0** nur Ergebnisse drucken.
- PRT-** keine Druckausgabe.
- PRT+** drucke jeden Iterationsschritt.
- ALL** alle Nullstellen berechnen.
- 1** eine Nullstelle berechnen.

```
#IT  dp  dq  |B0|+|B1|

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 1,0000E-10
#IT dp:dq dB0B1 PRT0 ALL BACK
```

```
INPUT: Startwerte
... 0 von 6 berechnet

T: 0,0000
Z: 0,0000
Y: 0,0000
X: 0,0000
BAIR p;q X1:X2 auto PARA BACK
```

Verfahren:

- BAIR** Bairstow-Verfahren.
- LIN** Lin-Verfahren.

Startwertewahl:

- p;q** Startwerte: p und q .
- X1:X2** Startwerte: x_1 und x_2 .
- auto** automatische Startwerte.

ACHTUNG:

Mit der Startwerteeingabe wird das Verfahren sofort ausgeführt!

Nullstellen: externe einstufige Verfahren

SOLVE

Externes Verfahren: OSTRowski

$$x_1 = x - \frac{\sqrt{m} Y}{\text{sign}(Y') \sqrt{Y'Y' - YY''}}$$

PRP "OSTR"

```

Plus42 Print-Out
PRP "OSTR"
00 ( 66-Byte Prgm )
01▶LBL "OSTR"
RCL "P1" X↑2 RCL "P0"
RCL "P2" × - SQRT
RCL "P1" 0 ENTER
COMPLEX + COMPLEX R↓
SIGN × SF 25 1/X
RCL "#M" SQRT ×
RCL "P0" × RCL "XP"
X<>Y - STO "XP" SF 25
RTN .END.
    
```

Programmvariablen:

$$P0 = Y = Y(x)$$

$$P1 = Y' = Y'(x)$$

$$P2 = Y'' = Y''(x)$$

$$XP = x$$

$$\#M = m \text{ (Parameter } m\text{)}$$

$$\#m = m \text{ (errechnet)}$$

```

#IT YDIFF XDIFF Xo
... 0 von 6 berechnet

T: 99,0000
Z: 1,0000E-10
Y: 1,0000E-10
X: 17,0000

P 1 extrn PARA NEG BACK
    
```

```

externer PRGM-Name ?

OSTR_
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ
    
```

R/S

```

Nullstelle gefunden
#CNT |Xd| Y(Xn) Xn

T: 15,0000
Z: 0,0001
Y: 1,8258E-11
X: 3,0001

SHOW PRT Xn+1 N-IT Y/Xn BACK
    
```

```

Plus42 Print-Out

#METHOD= "extrn"

#CNT: i=15 extrn
m = 1,0000
Yi = 1,8258E-11
Xi = 3,0001
    
```

Nullstellen: externe mehrstufige Verfahren

SOLVE

Externes Verfahren: KASTuriarachi

$$x_0^* = x_0 - \frac{Y_0}{Y'_0}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0 - x_0^*) Y_0}{Y_0 - Y_0^*}$$

PRP "KAST"

```
Plus42 Print-Out
PRP "KAST"

00 ( 78-Byte Prgm )

01 LBL "KAST"
RCL "XP" RCL "P0"
RCL "P1" ÷ - "Xext1"
XEQ "HPOLY" RCL "XP"
RCL "XP" RCL "Xext1" -
RCL "P0" × RCL "P0"
RCL "Y0ext1" - ÷ -
STO "XP" SF 25 RTN
.END.
```

Programmvariablen:

$$XP = x_0$$

$$P0 = Y_0 = Y(x_0)$$

$$P1 = Y'_0 = Y'(x_0)$$

$$Xext1 = x_0^*$$

$$Y0ext1 = Y_0^* = Y(x_0^*)$$

Argumente, Funktionswerte:

$$\text{ALPHA} = \text{"Xext\{m\}" } \quad m = 0:9$$

nach XEQ "HPOLY": $Y, Y' \dots Y^{(v)}$

$$Y\{n\}ext\{m\} \quad n = 0:4 \quad m = 0:9$$

$$\text{Beispiel: } Y1ext3 = Y'(Xext9)$$

```
#IT YDIFF XDIFF Xo
... 0 von 6 berechnet
```

```
T: 99.0000
Z: 1.0000E-10
Y: 1.0000E-10
X: 17.0000
```

P 1 extrn PARA XEQ BACK

externer PRGM-Name ?

KAST_
ABCDE FGHI JKLM NOPQ RSTUV WXYZ

R/S

```
Nullstelle gefunden
#CNT |Xdi| Y(Xn) Xn
```

```
T: 22.0000
Z: 0.0001
Y: 2.8261E-11
X: 3.0001
```

SHOW PRT Xn+1 N-IT Y/Xn BACK

```
Plus42 Print-Out

#METHOD= "extrn"

#CNT: i=22 extrn
  m = 1.0000
Yi = 2.8261E-11
Xi = 3.0001
```

